DM2C - Champagne !

Éléments de correction

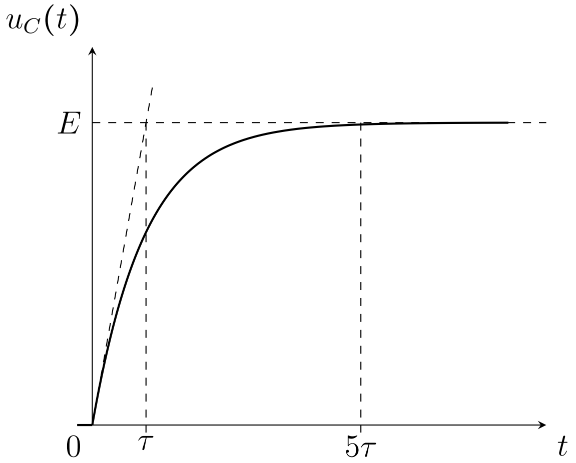
Bulles dans le champagne

1. Dans le cas d'une bulle d'air, assimilée à une boule de rayon r, on a : $\boxed{P = mg = \rho_{CO_2}\frac{4}{3}\pi r^3 g}$ et la poussée d'Archimède : $\boxed{\Pi = \rho_{eau}\frac{4}{3}\pi r^3 g}$ or $\rho_{eau} = 1000$ kg.m^{-3} et $\rho_{CO_2} \approx 1$ kg.m^{-3}. Ainsi, la poussée d'Archimède exercée par l'eau sur la bulle d'air prédomine devant le poids de cette bulle.

2. Le PFD sur un axe vertical ascendant (Oz) donne : $\overrightarrow{\Pi} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{f} = m\overrightarrow{a_z}$ soit : $\frac{4}{3}\pi r^3\left(\rho_{eau} - \rho_{CO_2}\right)\overrightarrow{e_z} - 6\pi\eta r\overrightarrow{v} = m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}$. Il vient : $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{6\pi\eta r}{m}\overrightarrow{v} = \frac{4}{3}\frac{\pi r^3}{m}\left(\rho_{eau} - \rho_{CO_2}\right)$. On commence par identifier : $\boxed{\tau = \frac{m}{6\pi\eta r}}$, on peut alors obtenir : $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{v_{lim}}}{\tau}$ avec par identification : $\boxed{\overrightarrow{v_{lim}} = \frac{4r^2\rho_{eau}g}{3\eta}\overrightarrow{e_z}}$

3. Voir méthode générale du cours, on peut résoudre vectoriellement (ou en projection sur $\overrightarrow{e_z}$), il vient : $\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{v_{lim}} + \overrightarrow{A}e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec condition initiale : $\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v_{lim}} + \overrightarrow{A}$donc : $\boxed{\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_{lim}}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$ avec $\boxed{\tau = \frac{m}{6\pi\eta r} = \frac{\rho_{CO_2}4/3\pi r^3}{6\pi\eta r}}$

4. Allure classique pour une équation différentielle d'ordre 1 :



avec τ le temps caractéristique du régime transitoire, tel que $v(\tau) = 0,63v_{lim}$ et v_{lim} la vitesse limite atteinte en régime permanent, lorsque les frottements compensent la poussée d'Archimède.

5. En considérant $\rho_{CO_2} \approx 1$ kg.m^{-3} (en réalité on est plutôt à 1,87 kg.m^{-3}, soit de l'ordre de 2 selon Wikipédia pour une pression atmosphérique et à 15 °C), les applications numériques donnent : $\boxed{\tau \approx 0,17\text{ms}}$ et $\boxed{v_{lim} \approx 31,6\text{m.s}^{-1}}$.

On peut considérer que le régime permanent est atteint quasiment instantanément. La vitesse de remontée de la bulle semble trop élevée (environ 120 km/h !), en réalité, comme vu en dernière partie, le rayon de la bulle augmente au cours de la montée, ce qui augmente la force de frottement, ainsi la vitesse limite est plus faible. La vitesse moyenne de remontée des bulles semble rapide à l'œil mais est plutôt de l'ordre de la seconde pour la hauteur totale du verre, soit environ 15 cm/s. (à vérifier « expérimentalement » ...)

6. $\boxed{\rho = cste}$

7. La loi de la statique des fluides (vu en deuxième année) donne en projection sur $\overrightarrow{e_z}$ vertical descendant : $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \rho g$ soit : $P(z) = \rho g z + cste$ si on prends $z = 0$ la surface du liquide dans le verre, on a $P(0) = P_0$ avec P_0 la pression atomsphérique, soit alors : $\boxed{P(z) = P_0 + \rho g z}$

8. Au fond du verre la pression dans le liquide est plus grande, si on suppose (hypothèse de ce modèle simplifié) qu'à l'équilibre, la pression à l'intérieur de la bulle est égale à la pression dans le liquide, alors la pression du CO_2 dans la bulle est plus grande au fond du verre.
En remontant, la pression intérieure va diminuer. A T et n constant et en supposant que le CO_2 suive le modèle du gaz parfait, il vient que le volume de la bulle augmente en remontant dans le verre.

9. Une bulle qui atteint la surface est en équilibre avec l'atmosphère, donc la pression à l'intérieur est égale à la pression atmosphérique (en réalité, à ce moment la bulle éclate et la quantité de CO_2 est libérée dans l'air).

10. La pression extérieure à la bulle (dans le champagne) est donnée par : $P_{ext} = P(z) = P_0 + \rho g z$ de plus, avec R le rayon de la bulle, on a : $\Delta P = P_{int} - P_{ext} = \frac{2\gamma}{R}$ en passant par l'équation d'état pour la pression intérieur, il vient : $\Delta P = P_{int} - P_{ext} = \frac{2\gamma}{R} = \frac{nRT}{V} - (P_0 + \rho g z)$ soit alors : $P_0 + \rho g z = \frac{nRT}{V} - \frac{2\gamma}{R}$ ou : $P_0 + \rho g z = \frac{nRT}{4/3\pi R^3} - \frac{2\gamma}{R}$. Par identification on a donc : $\boxed{A = \frac{nRT}{4/3\pi R^3}}$ et $\boxed{B = \frac{2\gamma}{R}}$ avec n la quantité de matière de CO_2 dans la bulle, T la température dans la bulle (et dans le champagne donc) et γ la tension superficielle de l'interface champagne/CO_2.

11. Avec ce modèle plus poussé, on a plus proprement le fait que lorsque z augmente (en profondeur donc) le rayon diminue. Ainsi si z diminue, donc si on monte dans le verre (axe vers le bas), alors le rayon de la bulle augmente et la bulle grandit bien en montant dans le verre. Cette analyse plus complète est en accord avec le précédent modèle plus simple.

Bon courage et bon travail ! ☺