

Pendule

Soit un pendule simple de longueur ℓ , auquel est attaché une masse m . On note $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

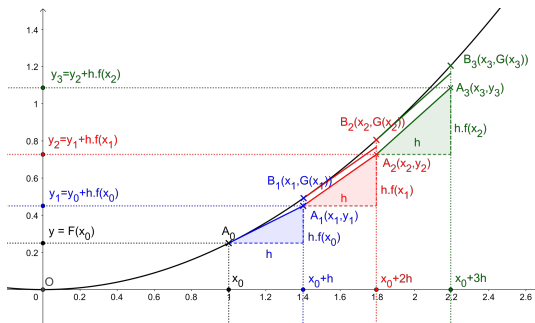
1 Simulation / Animation

Le script `pendule.py` permet de simuler le mouvement d'un pendule simple pour différentes conditions initiales. Le graphe trace l'évolution temporelle de l'angle et de la vitesse angulaire.

1. Exécuter le script et effectuer des essais en modifiant les conditions initiales.
2. Quand est-ce que la vitesse est maximale? Nulle?
3. Quel est le déphasage de l'angle par rapport à la vitesse angulaire? Comment le qualifier?

2 Méthode d'Euler

Nous nous intéressons à la résolution de l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta(t)$ par la méthode d'Euler. Nous en rappelons le principe : on évalue la valeur de la fonction à un instant $t + h$ plus loin grâce à la dérivée de la fonction à l'instant t .



Algorithm 1: Méthode d'Euler

```

1 def euler(ED, y0, t0, tf, n):
    Data: func : ED, float : y0, float : t0,
          float : tf, int : n
    Result: list : liste des t et liste des y
2     pas ← (tf - t0)/n
3     *créer une liste vide des temps t
4     *créer une liste vide des y
5     t ← t0
6     y ← y0
7     for k = 0 to n do
8         *ajouter t à la liste des temps
9         *ajouter y à la liste des y
10        t ← t + pas
11        y ← y + pas * ED(y, t)
12    return liste des temps et liste des y

```

4. A l'aide du pseudo-code, écrire une fonction `euler(ED,y0,t0,tf,n)` qui permet d'implémenter la méthode d'Euler.
5. On définit l'équation différentielle d'ordre 1 suivante afin d'effectuer un essai :

```

1 def ED_essai(y,t):
2     dy = -y
3     return dy

```

Effectuer un essai de votre méthode d'Euler sur cette équation différentielle avec $y_0=10$, pour 200 itérations comprises entre 0 et 20 (unités arbitraires). Tracer le graphe de $y(t)$ grâce à `matplotlib.pyplot`. L'allure graphique est-elle en accord avec l'équation différentielle?

6. La méthode d'Euler permet de résoudre une équation différentielle d'ordre 1. La résolution d'une équation différentielle d'ordre 2 est possible par la méthode d'Euler en la réécrivant sous la forme d'un système de deux équations différentielles d'ordre 1. Rappeler la forme de l'équation différentielle du pendule simple vérifiée par θ . On pourra poser une pulsation propre ω_0 .
7. En déduire une expression vérifiée par $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ qui sera l'équation différentielle vérifiée par θ .

8. Commenter la fonction `euler_2(ED,y0, dy0, t0,tf,n)`. Que représente `dy`? Que renvoie cette fonction?
9. Compléter la fonction `euler_2(ED,y0, dy0, t0,tf,n)` afin qu'elle soit fonctionnelle.
10. Donner l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique qui oscille autour de la position d'équilibre $y = 5$ avec une période propre $T_0 = 10$.
11. A partir de la question précédente, écrire une fonction `ED_essai_2(y,t)` qui renvoie $\frac{d^2y}{dt^2}$.
12. Effectuer un essai de votre méthode d'Euler 2 sur cette équation différentielle pour une position initiale égale à 15 et une vitesse initiale nulle. On prendra `tf=20` et `n=500`. Tracer l'allure de la solution et commenter le graphe.
13. Définir les variables globales `g`, `ell` et `omega0` pour un pendule simple de longueur 1 m.
14. Ecrire une fonction `pendule(theta,t)` qui renvoie $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ à partir de l'équation différentielle du pendule simple.
15. Ecrire une fonction `OH(theta,t)` qui renvoie $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ à partir de l'équation différentielle du modèle de l'oscillateur harmonique.
16. Tracer sur un même graphe les solutions des deux équations différentielles définies ci-dessus. On prendra une vitesse initiale nulle et on essaiera pour un angle de départ égal à 10° , 15° , 20° , 30° et 90° (penser à convertir en radians). Commenter.
17. Comment semble évoluer la période du pendule si on augmente l'angle initial?

3 Analyse spectrale

Afin d'obtenir une description plus fine, nous allons nous intéresser au spectre de Fourier des réponses que nous venons de tracer. Les fonctions `signal_1(t)`, `signal_2(t)`, `spectre(signal, t)` et `temps(T, fe)` permettent de tracer un signal et son spectre de Fourier.

18. Ecrire les instructions permettant d'afficher le spectre du signal 2. Comparer les spectres des signaux 1 et 2. Commenter.
19. Ecrire les instructions permettant de calculer les solutions du pendule simple et du modèle de l'oscillateur harmonique. On prendra une vitesse initiale nulle, des instants compris entre 0 et 1000 s pour 10000 points. On essaiera pour un angle de départ égal à 10° , 15° , 20° , 30° et 90° . Commenter les spectres.
20. L'équation différentielle du pendule simple est-elle linéaire? Celle de l'oscillateur harmonique? Dans quel cas a-t-on apparition de fréquences supplémentaires?
21. Comment semble évoluer la période du pendule si on augmente l'angle initial?

4 Portrait de phase ★

22. Exécuter le code, commenter les résultats. Commenter le code.

5 Energie ★

23. Exécuter le code, commenter les résultats. Commenter le code.
24. Comment qualifier le déphasage entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de pesanteur?

Bon courage et bon travail! ☺