Lapins (de 6 semaines)

Méthode d'Euler

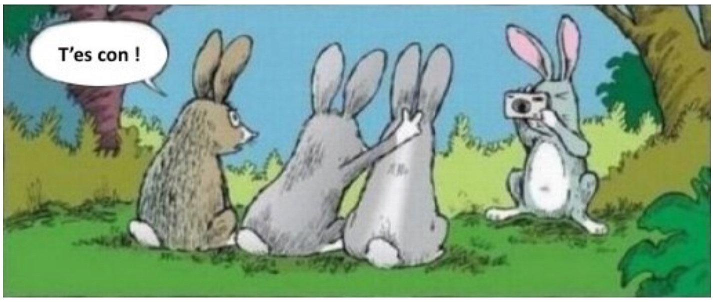
La méthode d'Euler est une méthode numérique de résolution d'équations différentielles pas à pas.

1 Population de lapin·e·s en prépa

Nous utiliserons le module `array` de `numpy` permettant de manipuler des tableaux, en l'occurence une matrice (2,1), la matrice populations `P` ainsi que sa dérivée temporelle `dP` :

$$\text{populations} = \texttt{P} = \begin{pmatrix} L \\ R \end{pmatrix} \qquad \text{dérivée populations} = \texttt{dP} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}$$

De l'aide ici : `https://www.courspython.com/apprendre-numpy.html#tableaux-numpy-array`



La problématique est de déterminer l'évolution de la population de lapins en présence de prédateurs comme le renard. On souhaite également déterminer l'évolution de la population des renards.

On notera L la population de lapins et R celle des renards. Le modèle envisagé est celui de Lotka-Volterra :

— en absence de renards, la population de lapin croît exponentiellement. On note b_1 la vitesse de croissance (qui dépend directement du taux de rencontre de lapins-lapines et de la technique de drague du lapin) :

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = b_1 L$$

— en présence de lapins, l'accroissement de la population de renards augmente proportionnellement au nombre de rencontre entre lapins et renards, lui-même proportionnel aux populations de renards et de lapins. On note b_2 la vitesse de croissance (qui dépend directement de la capacité du renard à manier le filet pour attraper les lapins) :

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = b_2 RL$$

— en présence de renards, l'accroissement de la population de lapins est diminué proportionnellement au nombre de rencontre entre lapins et renards, lui-même proportionnel aux populations de renards et de lapins. On note k_1 la vitesse de prédation (qui dépend directement du nombre de ~~bars~~ forêts acceptant à la fois des renards et des lapins) :

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -k_1 RL$$

— en absence de lapins, la croissance des renards décroît exponentiellement. On note k_2 la vitesse de disparition (qui dépend directement du taux de cholestérol du renard) :

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = -k_2 R$$

Le système d'équations différentielles (d'ordre 1) à résoudre est donc le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = b_1 L - k_1 RL \\ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = b_2 RL - k_2 R \end{cases} \tag{1}$$

2 Codage

On notera `lapins` la liste qui stocke l'évolution de la population `L` de lapins au cours du temps. On notera `renards` la liste stockant l'évolution de la population `R` de renards. On notera `P` la matrice populations (tableau numpy array) contenant les deux listes `lapins` et `renards`.

1. Implémenter la fonction `euler(ED, t0, tf, y0, n)` rencontrée précédemment dans l'année.
2. Écrire une fonction `ED_lapins` qui prends comme argument la matrice `P` stockant les deux listes `lapins` et `renards`, les instants `t` et qui retourne `dP`, la matrice donnant les dérivées en vous aidant du système d'équations différentielles défini précédemment. Cette fonction permet de définir le système d'équations différentielles.
3. Écrire une fonction `resolution` qui prends comme arguments une fonction `ED` définissant le système d'équation différentielles à résoudre, un instant initial `t0`, un instant final `tf`, une population initiale de lapins `L0`, une population initiale de renards `R0` et un nombre de points `n`. Cette fonction retournera plusieurs listes :
   — une liste `t` des instants ;
   — une liste `lapins` de la population de lapins aux différents instants ;
   — une liste `renards` de la population de renards aux différents instants.
4. Écrire une fonction `graphes` qui prends comme argument une fonction `ED` définissant le système d'équations différentielles à résoudre, un instant initial `t0`, un instant final `tf`.
   Cette fonction doit tracer 2 graphes sur une même page et sauvegarder ce fichier sous le nom `graphes_lapins_renards.pdf`. On veut :
   — le graphe des populations de lapins et de renards au cours du temps sur un même graphe ;
   — le portrait de phase `renards` en fonction de `lapins` sur un autre graphe à droite.

3 Tracé des graphes

Paramètres biologiques des populations :
`b1, b2, k1, k2 = 0.1, 0.00004, 0.0005, 0.04`

Conditions initiales des populations :
`L0, R0 = 2 000, 600`

Paramètres d'acquisition :
`t0, tf, n = 0, 500, 100 000`

4 Analyse des résultats

Cette partie du travail n'est pas à rendre, mais vous permettra de conclure et d'utiliser votre code. Après avoir tracer les graphes, observer et analyser :

— Commenter l'évolution périodique des populations.

— À quoi reconnaît-on que le système évolue de manière périodique sur le portrait de phase ?

— Où se situe l'instant $t_0 = 0$ sur le portrait de phase ?

— Analysez les points particuliers et faire le lien avec les points particuliers sur le portrait de phase (population de lapins minimale, maximale, idem pour la population de renards).

— Dans quel sens suit-on le portrait de phase ?

Bon courage et bon travail ! ☺