

**DS3 - Électricité (2 heures)**

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, **la clarté et la précision** des raisonnements entreront dans une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. Les candidats soigneront leur copie en conséquence. En particulier, les expressions littérales et les résultats des applications numériques seront encadrés. On changera de page pour un nouveau problème et on respectera les notations de l'énoncé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**Sujet à rendre, calculatrice interdite.**

Nom :

## I Cours (5min)

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par  $u_L$  sur un circuit  $RL$  série soumis à un échelon  $E$ .
2. On ferme l'interrupteur à  $t = 0$ , résoudre l'équation différentielle et tracer l'allure graphique de  $u_L(t)$ .
3. Soit l'équation différentielle  $\ddot{x} + 4x = 12$ , la résoudre et donner  $x(t)$  pour  $x(0) = 2$  et  $\dot{x}(0) = 0$ .
4. Établir l'équation différentielle vérifiée par  $u_C$  sur un circuit  $RLC$  série soumis à un échelon  $E$ .
5. Donner la solution homogène d'une équation différentielle d'ordre 2 si  $\Delta < 0$ .

## II Lampe de poche (30min)

On étudie une lampe de poche. Il s'agit d'une ampoule, alimentée par une pile de tension à vide  $E = 6$  V et de résistance interne  $r = 10 \Omega$ .

6. Faire un schéma du circuit avec l'ampoule, la source de tension idéale de  $6V$  et la résistance interne.

L'ampoule est un dipôle non linéaire complexe à étudier. Pour simplifier, nous la modélisons par une résistance  $R$ . Ceci revient donc à remplacer l'ampoule par une résistance  $R$  dans le schéma du circuit.

7. Donner l'expression de la puissance dissipée  $P_u$  par l'ampoule d'abord en fonction du courant  $I$  qui la parcourt et de  $R$ , puis en fonction de  $r$ ,  $R$  et  $E$ .
8. On souhaite que cette puissance dissipée par  $R$  soit maximale (pour maximiser l'éclairage). Les caractéristiques de la pile sont fixées, mais on peut en revanche choisir l'ampoule à utiliser et donc la valeur de  $R$ .

Montrer qu'il existe une valeur de  $R$ , que l'on exprimera en fonction de  $r$ , qui maximise la puissance dissipée  $P_u$  par l'ampoule.

*Indication* : il faut considérer la puissance comme une fonction de  $R$  :  $P_u = f(R)$ , et étudier le maximum de  $f$  comme en mathématiques.

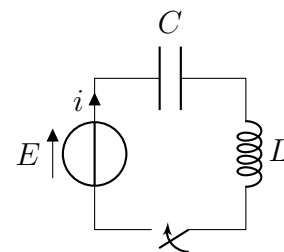
9. On admet que la réponse à la question précédente est  $R = r$ . Pour un fonctionnement d'une heure :
  - Quelle est l'énergie délivrée par la pile (et donc reçue par l'ampoule) ?
  - Quelle est la charge débitée par la pile ?

10. Combien de temps la lampe peut-elle fonctionner si on utilise quatre piles AAA de capacité  $1250mA.h$  chacune ? *Indication* : On se demandera à quelle grandeur est homogène cette « capacité ».

## III Circuit LC (15min)

On étudie le circuit ci-contre. Pour  $t < 0$ , le condensateur est déchargé.

À l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur, ce qui connecte le générateur idéal de fem  $E$  constante au condensateur et à la bobine.



11. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité  $i$  qui circule dans le circuit.
12. Identifier la pulsation propre du circuit.
13. Déterminer proprement les valeurs de  $i(0^+)$  et  $\frac{di}{dt}(0^+)$ .
14. Résoudre complètement l'équation différentielle.
15. En déduire l'expression de la tension aux bornes de la bobine au cours du temps.
16. Représenter les allures de  $i(t)$  et  $u_L(t)$ .

## IV Stratégie de charge d'un condensateur (1h)

Un condensateur peut servir de batterie, c'est le cas par exemple des "supercondensateurs" qui équipent certains bateaux ou bus. Il se pose alors la question de la recharge du condensateur. L'énergie est prélevée sur le réseau électrique, et dans l'idéal on souhaite que 100% de cette énergie soit transférée au condensateur. Or ce n'est pas possible, comme nous allons le voir.

On raisonne sur le circuit ci-dessous pour envisager deux méthodes.

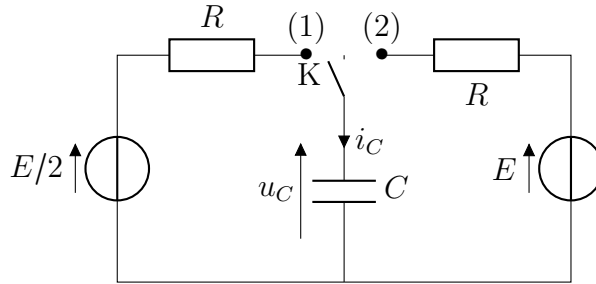


FIGURE 1 – Schéma de recharge d'un condensateur

### IV.1 Premier procédé de charge

L'interrupteur K est d'abord dans la position intermédiaire où il n'établit aucun contact.

Le condensateur étant initialement déchargé, on bascule l'interrupteur K dans la position (2) à  $t = 0$ . On peut alors ignorer la partie de gauche du circuit.

17. Établir l'équation différentielle portant sur  $u_C$ .

On la mettra sous la forme

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

avec  $\tau$  un paramètre dont on précisera le nom, l'expression et l'unité.

18. Déterminer sans utiliser l'équation différentielle la valeur de  $u_C(0^+)$  (juste après le basculement de l'interrupteur).
19. Résoudre complètement l'équation différentielle obtenue ci-dessus.
20. Tracer l'allure de la solution.
21. Donner en fonction de  $C$  et de  $E$  l'expression de l'énergie stockée par le condensateur à la fin de sa charge.
22. Démontrer que le courant  $i_C$  s'écrit, pour tout  $t \geq 0$  :

$$i_C(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

23. Calculer alors l'énergie électrique fournie par le générateur sur l'ensemble de la charge.
24. On appelle rendement (noté  $\eta$ ) de la charge du condensateur le rapport entre l'énergie stockée par le condensateur à l'issue de la charge et de l'énergie fournie par le générateur au cours de cette charge :

$$\eta = \frac{\mathcal{E}_{\text{stockée}}}{\mathcal{E}_{\text{fournie}}}$$

Quelle est la valeur du rendement de la charge avec la méthode envisagée ?

## IV.2 Second procédé de charge

On souhaite utiliser une méthode qui permet d'améliorer le rendement de la charge. On réalise une charge en deux temps. Le condensateur est initialement déchargé. L'interrupteur K est d'abord dans la position intermédiaire où il n'établit aucun contact. Puis il est fermé en position (1) à  $t = 0$ . Lorsque le régime transitoire qui s'ensuit est achevé, l'interrupteur est basculé en position (2).

25. Déterminer l'expression de  $u_C(t)$  pendant la première phase de la charge.
26. Déterminer en fonction de  $R$  et de  $C$  l'expression de l'instant  $t_1$  pour lequel la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur atteint 99% de sa valeur finale au cours de cette première étape.  
Dans la suite, on considérera que la charge est totalement achevée à cet instant  $t_1$  (donc  $u_C(t_1) \approx E/2$ ), et qu'on passe en phase 2 (basculement de l'interrupteur en position (2)).
27. Exprimer la tension  $u_C(t)$  aux bornes du condensateur au cours de la deuxième phase de charge, qui commence à  $t_1$ , en résolvant l'équation différentielle. Attention à l'expression de la condition initiale.
28. Tracer l'allure de  $u_C(t)$  en fonction du temps au cours de l'ensemble des deux phases de charge.
29. Exprimer l'intensité  $i_C$  qui traverse le condensateur pendant les deux phases de charge. On distinguera les cas en fonction de  $t$ .
30. Déterminer l'énergie électrique fournie par les deux générateurs pendant la charge.  
On pourra utiliser  $e^{-5} \approx 0$ .
31. En déduire le rendement pour cette nouvelle façon de procéder. Conclure quant aux avantages et désavantages.  
Peut-on envisager une méthode qui permette d'atteindre un rendement de 100% ? Avec quel désavantage ?

Bon courage et bon travail ! ☺