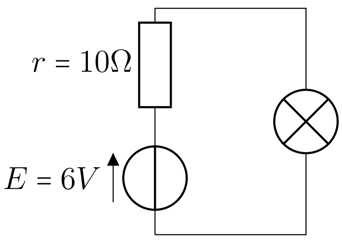
DS3C - Électricité (2 heures)

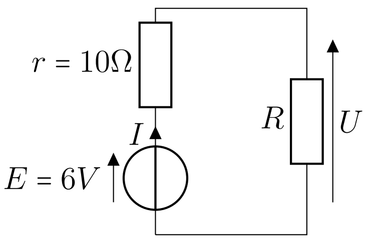
Éléments de correction

I Cours (5min)

1. Voir cours et TEST.
2. Voir cours et TEST.
3. Voir cours et TEST.
4. Voir cours et TEST.
5. Voir cours et TEST.

II Lampe de poche (30min)

6. 

7. 

La puissance dissipée par effet Joule dans la résistance s'exprime selon $\boxed{P_u = RI^2}$

On reconnait un pont diviseur de tension : $U = \dfrac{R}{R+r}E$, soit $I = \dfrac{E}{R+r}$

Ainsi $\boxed{P_u = \dfrac{RE^2}{(R+r)^2}}$

8. Dérivons P_u par rapport à R :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P_u}{\mathrm{d}R} &= \frac{(R+r)^2 - R\times 2(R+r)}{(R+r)^4}E^2 \\ &= \frac{(R+r)-2R}{(R+r)^3}E^2 \\ &= \frac{r-R}{(R+r)^3}E^2\end{aligned}$$

Tableau de variation :

R	0		r		$+\infty$
$\dfrac{\mathrm{d}P_u}{\mathrm{d}R}(R)$		$+$	0	$-$	
P_u		$\nearrow$	$\dfrac{E^2}{4r}$	$\searrow$	

Pour $\boxed{R = r}$, la puissance dissipée par l'ampoule est maximale.
ATTENTION à distinguer la résistance qui rend P_u maximale et la valeur maximale de P_u : P_u est maximale pour $R = r$, et la valeur maximale de P_u vaut $\dfrac{E^2}{4R}$.

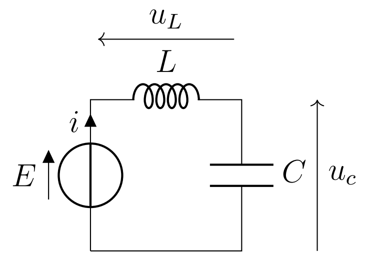
9. — Pour $R = r$, la puissance reçue par la résistance vaut $P_u = \dfrac{E^2}{4r}$, qui est constante. L'énergie reçue par la résistance pendant $\Delta t = 1h$ s'exprime donc $\boxed{E = \dfrac{E^2}{4r} \times \Delta t = 3240J}$ (**en convertissant la durée en secondes !**)
— La charge débitée par la pile est reliée à l'intensité du courant électrique, en régime permanent par : $Q = I\Delta t$, avec $I = \dfrac{E}{R+r} = \dfrac{E}{2r}$
Ainsi $\boxed{Q = \dfrac{E\Delta t}{2r} = 1080C}$

10. Chaque pile a une capacité, grandeur homogène à une charge électrique, de
$Q_{1\text{ pile}} = 1,250A.h = 1,250 \times 36000A.s = 4500C$
Les 4 piles possèdent donc $Q_{4\text{ piles}} = 18000C$
Q donne la charge nécessaire pour utiliser la lampe durant 1 h.
Ainsi, la durée, en heures, d'utilisation de la lampe est donnée par $\dfrac{Q_{4\text{ piles}}}{Q} = 16,7h$
Avec ces 4 piles AAA, la lampe peut être utilisée durant 16h40min.

III Circuit LC (15min)

Loi des mailles : $u_c + u_L = E$
Relation du condensateur : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$
Relation de la bobine : $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

Pour $t > 0$:



11. Ainsi $i = C\dfrac{\mathrm{d}(E - u_L)}{\mathrm{d}t}$, soit $i = -C\dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}$
Enfin : $i = -LC\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}$
$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{i(t)}{LC} = 0}$ Que l'on identifie avec $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 i = 0}$

12. On reconnaît l'équation différentielle d'un $\boxed{\text{oscillateur harmonique}}$ de pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$

13. Pour $t < 0$, l'interruption est ouvert, donc $i(0^-) = 0$. Or l'intensité à travers la bobine ne peut pas subir de discontinuité, donc $\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$
Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé, donc $u_c(0^-) = 0$. Or la tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc $\boxed{u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0}$

Enfin, d'après la loi des mailles à $t = 0^+$: $u_c(0^+) + u_L(0^+) = E$, soit $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = E$

Enfin $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{E}{L}}$

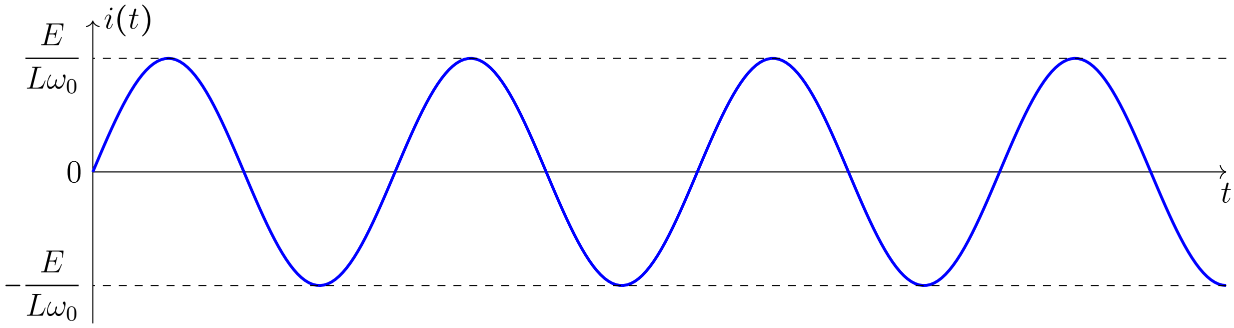
14. La solution générale s'écrit $i(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ dont les constantes d'intégration se déterminent à l'aide des conditions initiales.
$i(0^+) = 0 = A$

Dérivée de i par rapport au temps : $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = B\omega_0\cos(\omega_0 t)$

$\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{E}{L} = B\omega_0$, donc $B = \dfrac{E}{L\omega_0}$.

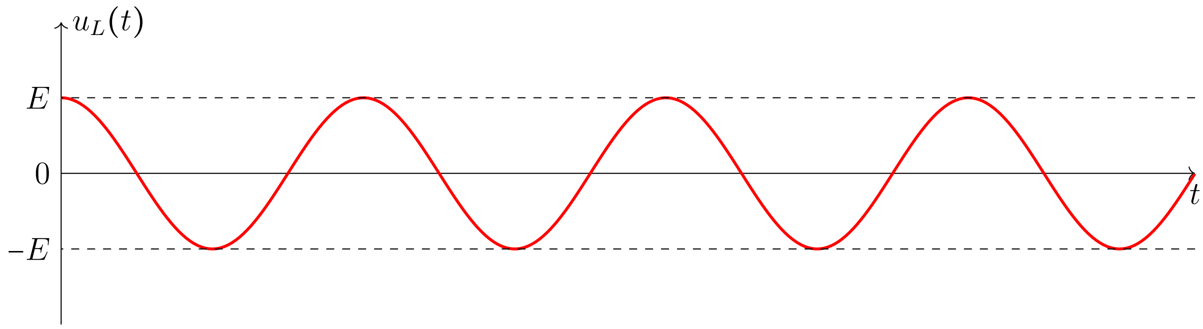
Ainsi $\boxed{i(t) = \dfrac{E}{L\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$

15. D'après la relation de la bobine : $u_L(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, Soit $\boxed{u_L(t) = E\cos(\omega_0 t)}$



16.

$u_L(0^+) = E$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} = -E\omega_0\sin(\omega_0 t)$, donc $\dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$: la tangente initiale est horizontale.



IV Stratégie de charge d'un condensateur (1h)

IV.1 Premier procédé de charge

17.
— Loi des mailles : $u_c(t) + u_R(t) - E = 0$ (1)
— Loi d'Ohm : $u_R(t) = R_i(t)$ (2)
— Relation du condensateur : $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ (3)

On cherche à obtenir l'équation différentielle vérifiée par u_c, il faut donc tout exprimer en fonction de u_c.

On injecte (3) dans (2) puis dans (1) : $u_c(t) + RC\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = E$

On identifie la constante de temps caractéristique du circuit RC $\boxed{\tau = RC}$, en seconde.

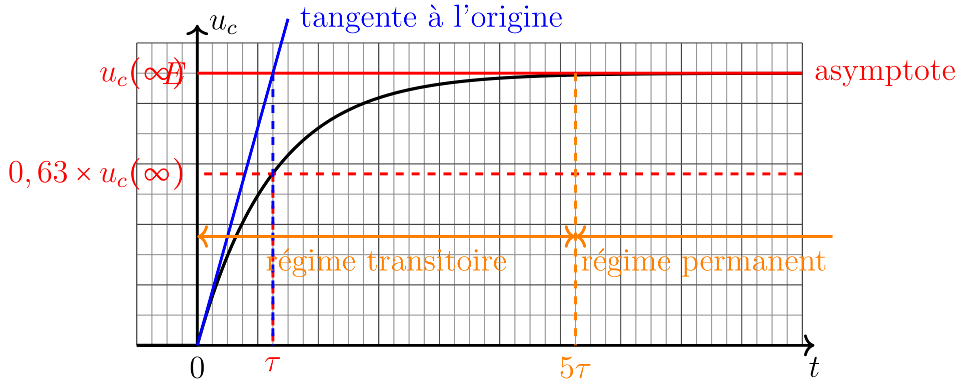
18. Le condensateur est initialement déchargé, donc $\boxed{u_c(0^-) = 0}$

La tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité : $\boxed{u_c(0^+) = u_c(0^-)}$

On en déduit que $\boxed{u_c(0^+) = 0}$

19.
- Solution de l'équation homogène (sans second membre) : $\dfrac{\mathrm{d}u_{c,H}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_{c,H}}{\tau} = 0$
  $u_{c,H}(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$
- Solution particulière de l'équation différentielle (avec second membre) recherchée sous la forme du second membre, (i.e.) sous la forme d'une constante ici : $u_{c,P} = C$, qui vérifie l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}u_{c,P}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_{c,P}}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$, soit avec $\dfrac{\mathrm{d}u_{c,P}}{\mathrm{d}t} = 0$, on en déduit $u_{c,P} = E$
- Solution générale de l'équation différentielle : $\boxed{u_c(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + E}$
- D'après les CI $u_c(0^+) = 0$.
  Or $u_c(0) = K + E$, donc $K + E = 0$
  ainsi $\boxed{u_c(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

20.



21. L'énergie stockée par le condensateur à la fin de la charge est $\boxed{\mathcal{E}_{\text{stockée}} = \dfrac{1}{2}Cu_C(\infty)^2 = \dfrac{1}{2}CE^2}$

22. D'après la loi du condensateur : $i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{CE}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$, avec $\tau = RC$

Ainsi $\boxed{i_C(t) = \dfrac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}}$

23. La puissance fournie par le générateur est : $\mathcal{P}_{\text{fournie}} = E \times i_C = \dfrac{E^2}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$

L'énergie fournie s'obtient en intégrant la puissance sur la durée du régime transitoire :

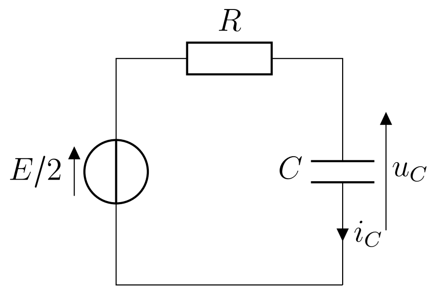
$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\text{fournie}} &= \int_0^\infty \mathcal{P}_{\text{fournie}}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \frac{E^2}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{E^2}{R}\left[-\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^\infty \\
&= -\frac{E^2}{R}\tau\left(0 - 1\right)
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{\mathcal{E}_{\text{fournie}} = CE^2}$

24. D'après les calculs précédents : $\boxed{\eta = \dfrac{\mathcal{E}_{\text{stockée}}}{\mathcal{E}_{\text{fournie}}} = \dfrac{1}{2}}$ (Vu dans le cours...)

IV.2 Second procédé de charge

25. Le circuit étudié dans la première phase est :



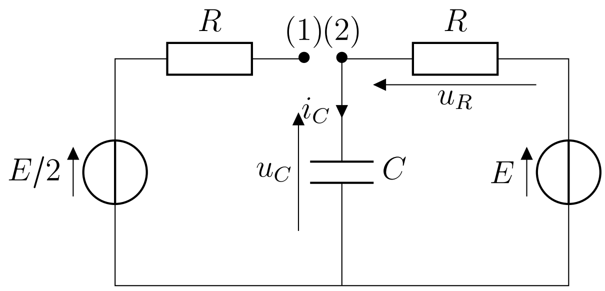
Ce circuit est identique à celui étudié précédemment, avec E remplacée par $E/2$.

Ainsi, pendant la première phase : $\boxed{u_c(t) = \frac{E}{2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

26. Cherchons t_1 tel que

$$
\begin{aligned}
u_c(t_1) &= 0,99 \times \frac{E}{2} \\
\frac{E}{2}\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right) &= 0,99 \times \frac{E}{2} \\
1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}} &= 0,99 \\
e^{-\frac{t_1}{\tau}} &= 0,01 \\
-\frac{t_1}{\tau} &= \ln(0,01) \\
t_1 &= \tau \ln(100) \\
t_1 &= 4,6\tau
\end{aligned}
$$

27. On étudie à nouveau ce circuit :

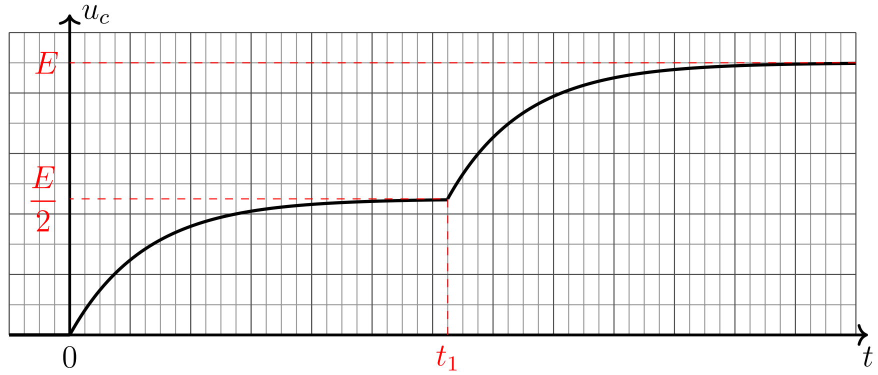


L'équation différentielle n'a pas changé, la solution générale non plus.
Ainsi la solution générale : $u_C(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + E$

La nouvelle condition initiale est $u_C(t_1) = \frac{E}{2} = Ke^{-\frac{t_1}{\tau}} + E$

Soit $K = -\frac{E}{2}e^{\frac{t_1}{\tau}}$

Ainsi $\boxed{u_C(t) = E - \frac{E}{2}e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}}$



28.

29. Pour $t \in [0, t_1]$ (comme précédemment) : $\boxed{i_C = \frac{E}{2R}e^{-\frac{t}{\tau}}}$

Pour $t > t_1$: $\boxed{i_C = \frac{E}{2R}e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}}$

30. L'énergie fournie par le générateur au cours de la totalité de la charge :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\text{fournie}} &= \mathcal{E}_{\text{fournie pendant phase 1}} + \mathcal{E}_{\text{fournie pendant phase 2}} \\
&= \int_0^{t_1} i_C \times \frac{E}{2}\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{\infty} i_C \times E\mathrm{d}t \\
\mathcal{E}_{\text{fournie}} &= \int_0^{t_1} \frac{E}{2R}e^{-\frac{t}{\tau}} \times \frac{E}{2}\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{\infty} \frac{E}{2R}e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} \times E\mathrm{d}t \\
&= -\frac{E^2}{4R}\tau\left[e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^{t_1} + \frac{E^2}{2R} \times (-\tau)\left[e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}\right]_{t_1}^{\infty} \\
&= -C\frac{E^2}{4}\left(e^{-\frac{t_1}{\tau}}-1\right) - C\frac{E^2}{2}\left(0-1\right) \\
&= -C\frac{E^2}{4}(e^{-5}-1) + \frac{CE^2}{2} \\
&= \frac{3}{4}CE^2
\end{aligned}$$

Les deux générateurs fournissent l'énergie totale $\boxed{\mathcal{E}_{\text{fournie}} = \frac{3}{4}CE^2}$ au cours des deux phases.

31. À la fin de la deuxième phase, la tension aux bornes du condensateur vaut toujours E, donc l'énergie stockée a toujours la même valeur $\mathcal{E}_{\text{stockée}} = \frac{1}{2}CE^2$

Le nouveau rendement vaut donc $\eta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} \Rightarrow \boxed{\eta = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}}$

Le rendement est meilleur, ce qui est un avantage, mais la durée de la charge est augmentée, puisqu'il faut environ deux fois plus de temps pour le charger selon les deux phases, chaque phase durant le même temps que l'unique charge envisagée précédemment.

Pour tendre un rendement de 100% on pourrait envisager d'effectuer N charges successives, avec un générateur de fem $\frac{E}{N-i}$ pour i allant de 0 à $N-1$ (rangs des charges).

Le rendement sera proche de 100% mais le temps très long... de Nt_1, donc d'autant plus long qu'on s'approchera du rendement de 100%.

Bon courage et bon travail ! ☺