DS5 - Mécanique (2 heures)

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, **la clarté et la précision** des raisonnements entreront dans une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. Les candidats soigneront leur copie en conséquence. En particulier, les expressions littérales et les résultats des applications numériques seront encadrés. On changera de page pour un nouveau problème et on respectera les notations de l'énoncé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Sujet à rendre, calculatrice interdite.

Nom :

I Cours

1. Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}$ en fonction de R et v pour un mouvement circulaire uniforme.
2. Établir l'équation différentielle du pendule simple par application du principe fondamental de la dynamique.
3. Établir l'équation différentielle du pendule simple par une approche énergétique.
4. Établir l'expression de la vitesse d'impact v lors d'une chute libre de hauteur h.
5. Exprimer la portée D d'un tir sans frottements si la vitesse initiale est $\vec{v_0}$ et qu'elle fait un angle α avec l'hroizontale.

II Mécanique en sécurité routière

II.1 Distance nécessaire pour s'arrêter sur une ligne droite horizontale

La sécurité routière insiste fortement sur le respect des distances minimales entre les véhicules afin qu'en cas d'incident imprévu, tout véhicule puisse s'arrêter sans danger.

DOCUMENT 1 : "Distance de sécurité". Source : http ://www.preventionroutiere.asso.fr

Sur autoroute, près des deux tiers des conducteurs ne respectent pas la distance de sécurité entre leur voiture et le véhicule qui les précède. Garder ses distances avec le véhicule que l'on suit est pourtant le meilleur moyen d'éviter une collision ou pire un carambolage.
La distance d'arrêt d'un véhicule correspond à la distance parcourue pendant le temps de réaction de son conducteur à laquelle s'ajoute la distance de freinage.

- *Temps de réaction noté t_R : on évalue à une seconde le temps minimum nécessaire pour que le conducteur réagisse en cas d'incident ou d'apparition d'un obstacle et ce, dans les meilleures conditions. Pendant ce temps-là, le véhicule continue sa course. Ce n'est qu'une fois l'information assimilée que le conducteur commence vraiment à freiner.*
- *Distance de freinage : sa longueur varie en fonction de la vitesse du véhicule, de l'efficacité du système de freinage, de la pente, ...*

Le Code de la Route a fixé une règle claire : l'intervalle de sécurité à ménager entre vous et le véhicule qui vous précède est au moins la distance que vous parcourez en 2 secondes. Plus votre vitesse est élevée, plus cette distance doit être grande.
Pour les véhicules lourds (PTAC> $3,5$ t) ou ceux dont la longueur dépasse 7 mètres, les ensembles de véhicules (voiture + caravane) et les camping-cars, cette distance est d'au moins 50 mètres.
Comment évaluer la bonne distance de sécurité ? Prenez un point de repère visuel sur le bord de la route comme un arbre ou un panneau de signalisation. Une fois que le véhicule qui vous précède est passé à sa hauteur, comptez 2 secondes. Si votre véhicule passe ce repère avant ce délai, vous êtes trop près.
Autre astuce : sur autouroute, les lignes délimitant la bande d'arrêt d'urgence mesurent 39 mètres et sont espacées entre elles de 13 mètres. A 130 km.h^{-1}, vous devez au moins laisser un intervalle de 2 traits soit environ 90 mètres pour arrêter votre véhicule sans percuter celui qui vous précède.

On considère un véhicule roulant sur une route rectiligne horizontale Ox à la vitesse v_0 prise égale pour l'instant à 130 km.h^{-1} avec un mouvement uniforme. On notera $\overrightarrow{e_x}$ le vecteur unitaire de l'axe Ox dans le sens du déplacement.

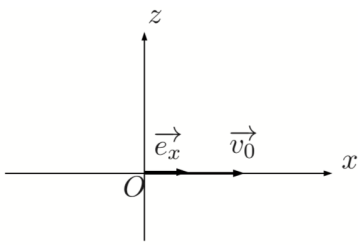


Figure 1 – Véhicule sur une route horizontale.

On qu'un obstacle a surgi à $t = 0$ pour $x = 0$. Pour les applications numériques, on prendra $t_R = 1,0$ s.

6. Rappeler la définition d'un mouvement rectiligne uniforme.

7. Lorsqu'un obstacle sur la voie apparaît au conducteur, la première phase du mouvement vers l'immobilisation correspond au temps de réaction t_R. Que peut-on dire de la nature du mouvement au cours de cette phase ? En déduire l'expression de la vitesse au cours du temps pour cette phase.

8. La seconde phase correspond au freinage proprement dit. Par souci de simplification, on considère que le freinage consiste à imposer une décélération a_0 constante. Si on suppose que $a_0 > 0$, donner l'expression du vecteur accélération au cours du temps puis celle du vecteur vitesse.

9. En déduire la position $x(t)$ au cours du temps pour l'ensemble des phases, et tracer $x(t)$.

10. Déterminer l'instant t_1 pour lequel le véhicule s'arrête. En déduire la distance d'arrêt en fonction de v_0, a_0 et t_R.

11. Exprimer puis calculer la valeur minimale de la décélération permettant d'utiliser les lignes de la bande d'arrêt d'urgence pour évaluer la distance de sécurité, c'est-à-dire pour que la distance d'arrêt soit inférieure à la distance D des deux lignes de la bande d'arrêt d'urgence.

12. Pour une valeur de décélération $a_0 = 12$ m.s^{-2}, comparer les temps d'arrêt et les distances d'arrêt pour des vitesses respectivement de 90 et 130 km.h^{-1} ? Les résultats sont-il logiques ?

13. Pour déterminer la validité de la règle préconisée par le Code de la Route de maintenir une distance par rapport au véhicule devant soi correspondant à la distance parcourue en $2,0$ s, calculer la décélération a_2 qui permettrait un arrêt du véhicule à l'instant $t_2 = 2,0$ s. Retrouve-t-on la même distance d'arrêt qu'avec la technique précédente pour une vitesse initiale de 130 km.h^{-1} ? Conclure ?

II.2 Relèvement d'un virage

14. On revient au cas d'une route sèche et horizontale mais elle n'est plus rectiligne. On la modélise par un arc de cercle horizontal de rayon R et de centre O. Rappeler les expressions de la vitesse et de l'accélération d'un mouvement circulaire en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'origine O et d'axe vertical Oz.

15. On veut parcourir cette portion de route à vitesse constante v avec un véhicule de masse m. Que peut-on dire de la vitesse angulaire de rotation sur l'arc de cercle ? En déduire l'expression de l'accélération du véhicule en coordonnées cylindriques.

16. En projetant le principe fondamental de la dynamique sur la verticale, exprimer la composante normale N de la réaction de la route.

17. Montrer qu'il y a forcément une force radiale $\overrightarrow{T}$ au cours du mouvement. On donnera l'expression de sa norme en fonction de m, v et R.

projection perpendiculaire à $\overrightarrow{u_z}$ projection perpendiculaire à $\overrightarrow{u_\theta}$

Figure 2 – Deux projections du relèvement d'un virage.

18. Montrer que l'accélération radiale correspond à la composante horizontale de la réaction normale. En déduire la valeur de la vitesse constante v dans le virage en fonction de g, R et β. Donner sa valeur pour $\beta = 20°$ et $R = 50$ m.

III Looping

Les looping de manège sont étudiées afin de rendre le plus agréable possible le passage dans la courbe, le Blue Fire d'Europa-Park est en service depuis 2009. Dans cet approche nous nous intéresserons à un looping supposé circulaire.

III.1 Préliminaires

Soit un objet de masse m, assimilé à un point matériel, soumis à un ensemble de forces dont la résultante est notée $\overrightarrow{F}$. On étudie l'évolution de ce point dans un référentiel galiléen et on note $\overrightarrow{v}$ sa vitesse dans le référentiel d'étude.

19. Définir la notion de référentiel galiléen. Donner un exemple de référentiel galiléen.

20. Énoncer le principe d'inertie.

21. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique.

22. Le point matériel est ici considéré dans le champ de pesanteur uniforme $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{e_z}$, avec $\overrightarrow{e_z}$ le vecteur unitaire de l'axe Oz vertical ascendant. Établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du point matériel.

23. Pourquoi dit-on du poids qu'il est une force conservative ?

24. Donner un exemple de force non conservative.

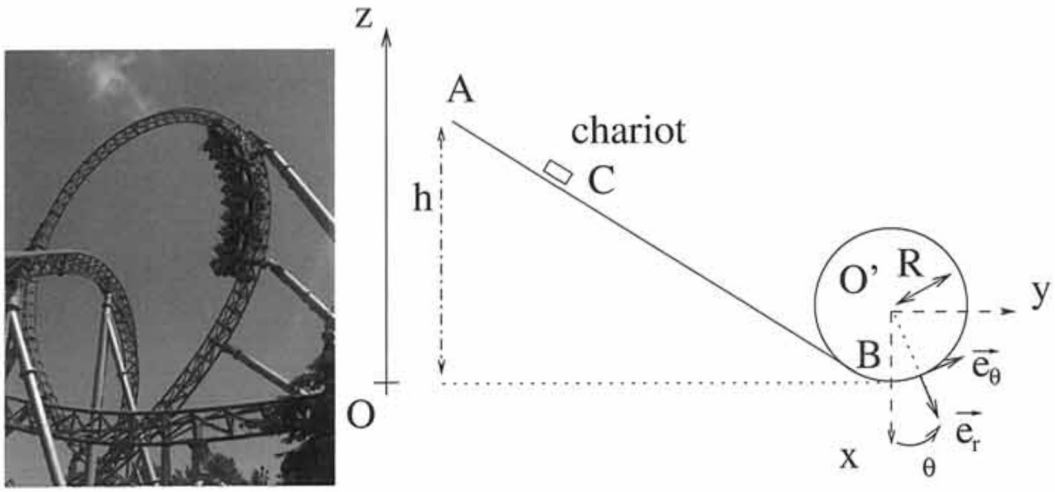
III.2 Étude du looping

Le descriptif du Blue Fire à son lancement indiquait :

« Top départ, c'est parti... de 0 à 100 km/h en 2,5 s chrono ! Un démarrage par catapulte qui propulse le visiteur à 40 m de haut, un instant de pure adrénaline ! S'enchaîne un looping à une hauteur de 40 m, sensation nouvelle pour le visiteur... qui se retrouve la tête à l'envers ! »

25. Estimer la valeur numérique de l'accélération du wagon pendant la phase de catapultage. Comparer à g, commenter.

Le looping simplifié que nous étudions, qui est représenté ci-dessous, est constitué d'une gouttière de lancement dont le point le plus haut est situé à une hauteur h au dessus du niveau du sol, et permet de guider un chariot vers un rail circulaire de rayon R. Il ne comporte donc pas de phase de catapultage, mais cela est compensé par un point de départ plus élevé du chariot.
De plus, dans notre modélisation, la liaison entre le chariot et le rail est unilatérale (on rappelle qu'une liaison unilatérale interdit le rapprochement de deux corps au delà du contact, mais n'empêche pas leur éloignement).
Le chariot et ses occupants totalisent une masse $m = 10$ tonnes, l'ensemble formé du chariot et de ses occupants est assimilé à un point matériel C. Le champ de pesanteur est uniforme, vertical et orienté vers le bas, de norme g. L'étude du mouvement sera toujours menée dans le référentiel terrestre, supposé galiléen sur la durée du mouvement.



Le modèle adopté pour la liaison entre le rail et les roues du chariot est celui de la liaison parfaite, c'est-à-dire qu'elle ne dissipe pas d'énergie. De plus les frottements de l'air sur les passagers et le wagon sont négligés devant les autres forces. L'origine de l'énergie potentielle de pesanteur est choisie au point B.

26. À l'origine, le chariot est placé en A, il est immobile. Quelle forme d'énergie possède-t-il ?

27. Le chariot est abandonné sans vitesse initiale au point A, exprimer sa vitesse lorsqu'il arrive en B, en fonction de h et g.

28. Pour la deuxième partie du mouvement du chariot, à partir du point B, le chariot est repéré par ses coordonnées polaires R et θ. Justifier le fait que la force que le rail circulaire exerce sur le chariot puisse s'écrire :

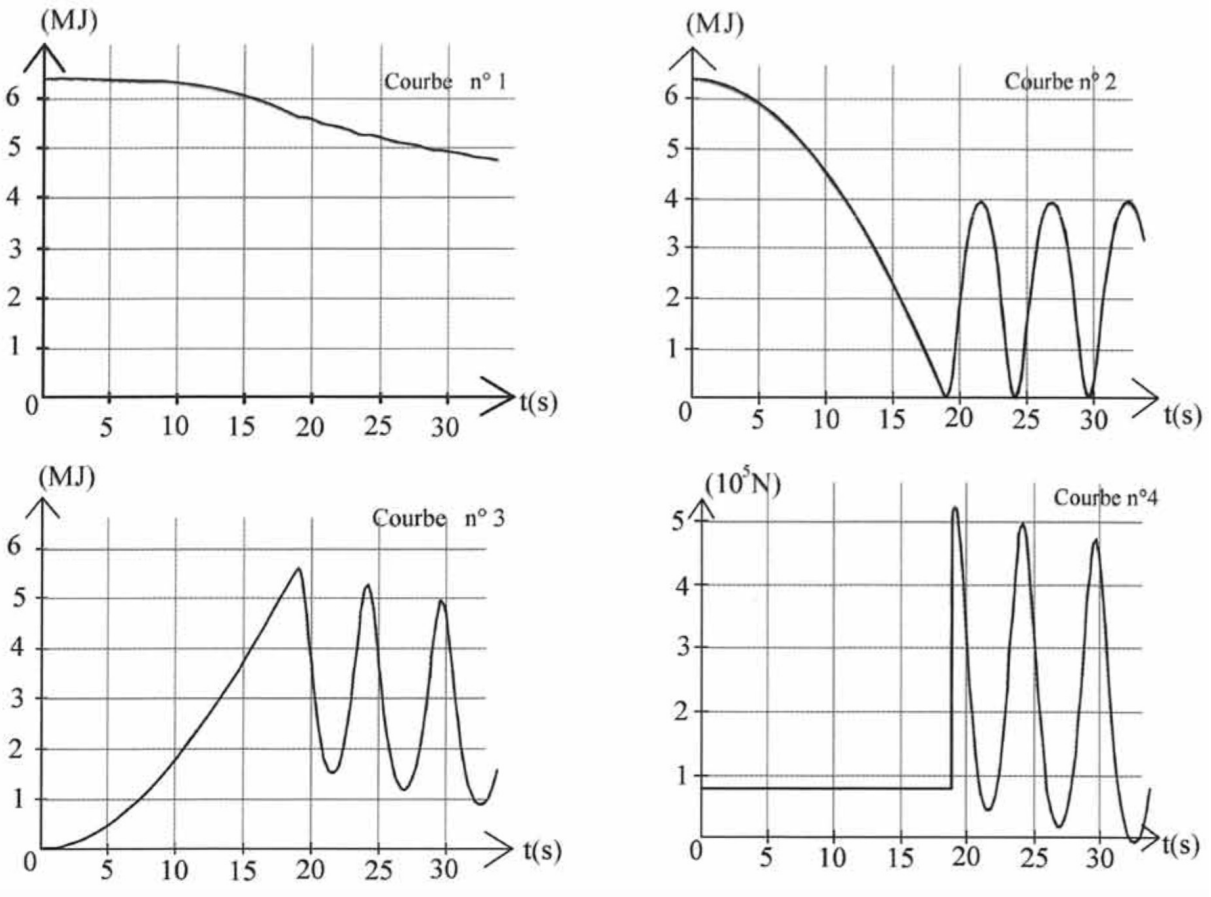
$$\vec{N} = -N\,\vec{e_r}$$

et représenter sur un schéma les différentes forces qui agissent sur le chariot.

29. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique et la deuxième loi de Newton, établir l'expression de N en fonction de θ et montrer qu'elle peut s'écrire :

$$N = mg\left(3\cos\theta + 2\left(\frac{h}{R} - 1\right)\right)$$

30. Établir une condition sur $\frac{h}{R}$ pour que le looping soit effectué.



31. Associer à chaque courbe la grandeur représentée, en justifiant chacune des réponses.

32. Estimer la hauteur initiale et la vitesse maximale atteinte. Vérifier que la condition trouvée lors de l'étude précédente est vérifiée.

33. À quelle date le chariot quittera-t-il la gouttière ?

34. Combien de tours complets a effectué le chariot dans cette situation avant de décrocher ?

Bon courage et bon travail ! ☺