DS5C - Mécanique (2 heures)

Éléments de correction

I Cours

1. Voir cours et TEST.
2. Voir cours et TEST.
3. Voir cours et TEST.
4. Voir cours et TEST.
5. Voir cours et TEST.

II Mécanique en sécurité routière

E3A MP 2017

II.1 Distance nécessaire pour s'arrêter sur une ligne droite horizontale

6. Rectiligne = la trajectoire est une droite. Uniforme = la norme du vecteur vitesse est une constante.
7. Initialement $\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{v_0}$. Donc pendant la durée t_R où il n'y a pas de freinage, le mouvement reste rectiligne et uniforme, pour t compris entre 0 et t_R, $\overrightarrow{v}(t) = v_0\overrightarrow{e_x}$.
8. Pendant le freinage, on a : $\overrightarrow{a} = -a_0\overrightarrow{e_x}$. Il vient :

$$\overrightarrow{v}(t) = (-a_0t' + v_0)\overrightarrow{e_x}$$

pour t' compris entre t_R et t (en réalité entre t_R et t_1 date d'arrêt).

9. Pour $]0; t_R[$: $x(t) = v_0t$
Pour $t > t_R$: $x(t) = -\frac{a_0}{2}(t - t_R)^2 + v_0(t - t_R) + C$.
Par continuité de $x(t)$ en $t = t_R$, on a :

$$x(t_R) = v_0t_R = C$$

d'où pour $t > t_R$: Pour $t > t_R$: $x(t) = -\frac{a_0}{2}(t - t_R)^2 + v_0(t - t_R) + v_0t_R$.

10. On arrive à :

$$d_a = \frac{v_0^2}{2a_0} + v_0t_R$$

11. On souhaite $d_a < D$, il vient :

$$\frac{v_0^2}{2(D - v_0t_R} < a_0$$

-

12. $t_1 = 4$ s pour 130 km.h^{-1} et $3,1$ s pour 90 km.h^{-1}. On s'arrête plus rapidement si la vitesse initiale est plus faible.

13. On pose $t_2 = 2,0 = t_{freinage} + t_R$. Avec $t_{freinage} = 1$ s hypothèse fixée. Il y a arrêt si et seulement si :

$$v(t_{freinage+t_R} = 0$$

il vient :

$$a_2 = \frac{v_0}{t_{freinage}} = 36 \text{ m.s}^{-2}$$

cela imposerait une distance d'arrêt de 54 m avec une décélération supérieure à $3g$! Mais le document n'impose pas $t_2 = 2$ s. Ce calcul ne traduit donc pas la règle du code de la route.

II.2 Relèvement d'un virage

14. Voir cours :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e_r} + R\ddot{\theta}\vec{e_\theta}$$

15. On souhaite $v = R\dot{\theta} = cste$, donc :

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e_r}$$

on a donc un MCU.

16. Pas de mouvement vertical : $N = mg$

17. Par application du PFD sur la voiture de masse m dans le référentiel galiléen :

$$m\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e_r} = \vec{T} + \vec{N} + m\vec{g} = \vec{T}$$

(d'après la question précédente). Il vient donc dans le référentiel du véhicule (non galiléen), le véhicule ne bougeant pas par rapport à lui même :

$$T = m\frac{v^2}{R^2}R = m\frac{v^2}{R}$$

il s'agit de la force du support qui compense la force d'inertie d'entrainement.

18. En l'absence de frottements pour un MCU ici :

$$\vec{a} = -m\frac{v^2}{R}\vec{e_r} = \vec{N} + m\vec{g}$$

sur la verticale :

$$N\cos\beta = mg$$

sur l'horizontale ($\vec{e_r}$) :

$$-m\frac{v^2}{R} = -N\sin\beta + 0$$

il vient :

$$v = \sqrt{Rg\tan\beta}$$

III Looping

III.1 Préliminaires

19. Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe d'inertie (et l'ensemble des lois de Newton) est vérifié. Le référentiel terrestre peut être supposé galiléen sur un temps très court devant sa rotation propre.

20. « Dans un référentiel galiléen et pour un système pseudo-isolé : un corps immobile reste immobile, un corps en mouvement est en mouvement de translation rectiligne uniforme et y reste. »

21. La variation d'énergie cinétique entre un point de départ et un point d'arrivée est égale à la somme des travaux des forces extérieures :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{AB}(\overrightarrow{F}_{ext})$$

22. L'énergie potentielle de pesanteur est l'énergie dont dérive le poids, elle est donc une primitive du poids.

$$\overrightarrow{P} = -\frac{\mathrm{d}E_{pp}}{\mathrm{d}z}\overrightarrow{e_z}$$

Pour un axe orienté vers le haut, on a :

$$\overrightarrow{P} = -mg\ \overrightarrow{e_z}$$

l'énergie potentielle de pesanteur est donc :

$$E_{pp} = -\int \overrightarrow{P}.\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = mgz + cste$$

en considérant que l'énergie potentielle de pesanteur est nulle en $z = 0$, la constante est alors nulle, soit :

$$E_{pp} = mgz$$

23. Le poids est une force conservative car elle ne dissipe pas l'énergie, elle dérive alors de E_{pp}.

24. Les frottements (fluides ou solides) sont des forces non conservatives.

III.2 Étude du looping

25. Le chariot passe de 0 à 100 km.h^{-1} en $2,5$ s, il gagne donc environ :

$$\frac{100}{3,6} \approx 30\ m.s^{-1}$$

en $2,5$ s, en arrondissant largement pour obtenir un ordre de grandeur, on a :

$$30\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

en 3 s, soit environ :

$$10\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

en 1 s, soit une accélération de :

$$10\ \mathrm{m.s^{-2}} \approx g$$

On remarque que l'accélération de départ est de l'ordre de g, en réalité dans ces manèges, les endroits où on subit le plus d'accélération sont dans les courbes, ou dans les loopings, du fait des trajectoires circulaires que le wagon nous impose, on subit alors en norme des accélérations de l'ordre de 4 g environ.

26. Initialement le chariot possède de l'énergie potentielle de pesanteur.

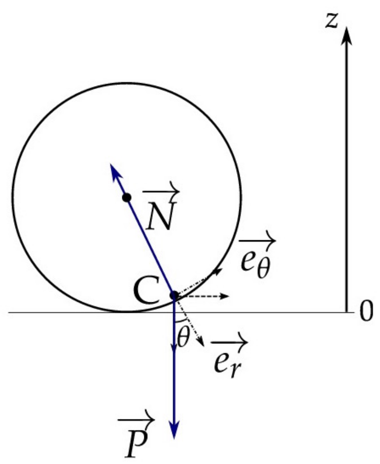
27. L'application du théorème de l'énergie cinétique ou la conservation de l'énergie mécanique amène à :

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

28. On peut écrire :

$$\overrightarrow{N} = -N\ \overrightarrow{e_r}$$

car la réaction s'effectue vers l'intérieur du looping, de plus si la réaction admettait une composante tangentielle (selon $\overrightarrow{e_\theta}$ elle dissiperait de l'énergie, or l'énoncé précise que le système est conservatif. Le schéma en question est :



29. Le PFD projeté sur $\overrightarrow{e_r}$ donne :

$$-m\frac{v^2}{R} = mg\cos\theta - N$$

(il faut rappeler que pour un mouvement circulaire, l'accélération radiale est donnée par $\overrightarrow{a} = -\frac{v^2}{R}\ \overrightarrow{e_r}$)
L'utilisation du théorème de l'énergie cinétique entre le point B et le point M à une altitude z quelconque donne :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -mgz$$

l'altitude z peut être liée à l'angle par :

$$z = R(1-\cos\theta)$$

On peut alors écrire :

$$mv^2 = 2mg\left(h - R(1-\cos\theta)\right)$$

si on injecte ce résultat dans le PFD, on a alors :

$$N = \frac{2mg}{R}\left(h - R(1-\cos\theta)\right) + mg\cos\theta$$

ou encore :

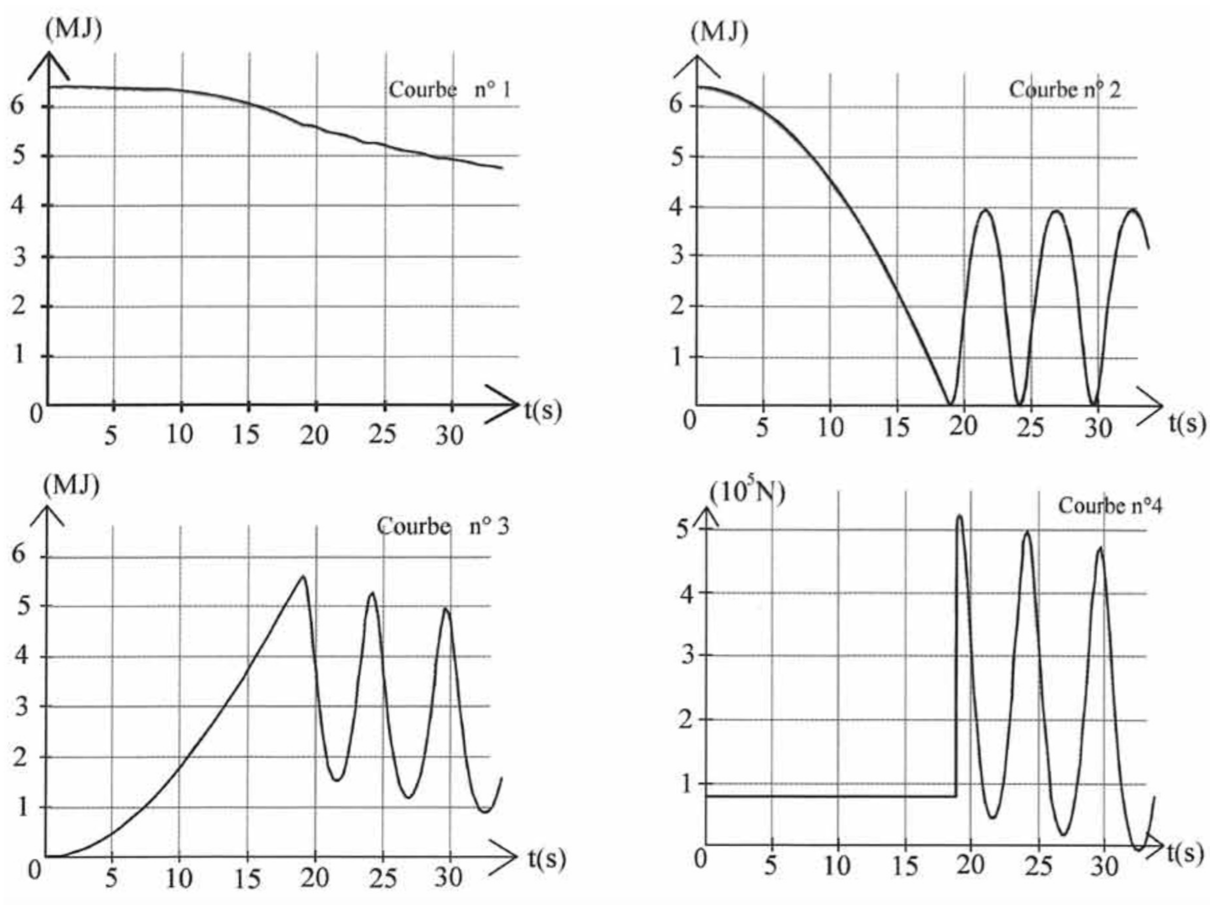
$$N = mg\left(3\cos\theta + 2\left(\frac{h}{R} - 1\right)\right)$$

30. Afin que le looping soit effectué, il faut que N reste positif quel que soit θ, soit :

$$3\cos\theta + 2\left(\frac{h}{R} - 1\right) > 0$$

Cette relation doit également être vérifiée dans le cas le plus limite, pour $\theta = \pi$, il vient alors :

$$\frac{h}{R} > \frac{5}{2}$$



31. La courbe n°4 est celle représentant N puisque c'est la seule exprimée en Newton. La courbe n°3 est celle représentant l'énergie cinétique dont la valeur est nulle lorsque le chariot est en haut de la rampe (à $t = 0$). La courbe n°2 est celle de l'énergie potentielle qui est minimale au point où la vitesse du chariot est maximale (et qui est maximale lorsque le chariot est en haut de la rampe à $t = 0$) et enfin la courbe n°1 est l'énergie mécanique qui diminue lentement à cause des frottements.

32. Pour calculer la hauteur initiale, on peut utiliser la courbe d'énergie potentielle :

$$E_{pp,max} = mgh \approx 6,3 \text{ MJ}$$

On en déduit :

$$h = \frac{E_{pp,max}}{mg} \approx \frac{6,3.10^6}{10.10^3 \times 10} \approx 63 \text{ m}$$

Le sujet précise que la hauteur maximale est 40 m, soit un rayon R de 20 m. On a alors :

$$\frac{h}{R} = \frac{63}{20} > 3$$

On est au-delà de $2,5$ la condition est bien vérifiée.

33. Le chariot quittera le rail dès que la réaction du support devient nulle, donc à environ 32 s. La courbe simulée après cette durée n'a plus de sens physique.

34. En s'appuyant sur la courbe d'énergie potentielle, on voit que le chariot aura effectué deux tours complets.

Bon courage et bon travail ! ☺