

DS6 - Mécanique (2 heures)

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront dans une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. Les candidats soigneront leur copie en conséquence. En particulier, les expressions littérales et les résultats des applications numériques seront **encadrés**. On changera de page pour un nouveau problème et on respectera les notations de l'énoncé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Sujet à rendre, calculatrice interdite.

Nom :

I Cours

1. Pour le système masse-ressort vertical, établir l'expression de la position d'équilibre z_{eq} en fonction de ℓ_0 , m , g et k .
2. Donner l'expression de la force de Lorentz.
3. Établir l'équation du mouvement du pendule simple par application du TMC.
4. Établir l'expression de l'énergie potentielle associée à la force conservative $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x$.
5. Établir l'expression de l'énergie potentielle effective pour un objet de masse m soumis à la seule force d'attraction gravitationnelle.

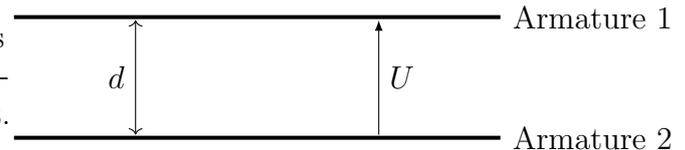
II Microscope électronique à balayage

Pour améliorer la résolution du microscope, par rapport au microscope optique, on remplace les photons par des électrons, de charge $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} C$ et de masse $m = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$.

Aspect électrique

6. Une particule chargée est plongée dans un champ électrique, donner l'expression de la force de Lorentz. Quelle est l'unité usuelle du champ électrique ?
7. Justifier que le poids de l'électron pourra être négligé devant la force de Lorentz électrique.

Les électrons sont accélérés dans un canon à électrons constitué de deux armatures planes et parallèles, distantes de $d = 1,0 cm$ et séparées par du vide quasi-parfait.



8. On applique entre les armatures une tension positive $U = V_1 - V_2$. Sur quelle armature les électrons doivent-ils être émis sachant que leur vitesse initiale est nulle ?
9. Exprimer la vitesse v atteinte par les électrons lorsqu'ils arrivent sur l'armature opposée, en fonction de U , e , m .

Défecteur magnétique

10. Une particule chargée est plongée dans un champ magnétique, donner l'expression de la force de Lorentz. Quelle est l'unité usuelle du champ magnétique ?
11. Donner quelques ordres de grandeur de champ magnétique.
12. Justifier que le poids de l'électron pourra être négligé devant la force de Lorentz magnétique.

Le rôle d'un déflecteur magnétique est simplement de dévier le faisceau d'électrons.

On suppose qu'un électron de vitesse v_0 arrive dans une zone où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} perpendiculaire au vecteur vitesse.

13. Justifier que le mouvement de l'électron est uniforme.
14. Tracer la trajectoire suivie par l'électron, en faisant clairement apparaître les vecteurs \vec{v}_0 et \vec{B} .
15. Déterminer l'expression du rayon du cercle décrit, en fonction de m , v_0 , e et B .

III Gravity

Dans le film Gravity, des astronautes effectuent une mission de maintenance sur le télescope spatial Hubble lorsque leur navette est détruite. Leur seul espoir semble être de rejoindre la Station spatiale internationale, l'ISS. Le but de cet exercice est de définir dans quelles conditions ce voyage spatial est possible. On suppose que le télescope Hubble et l'ISS sont en orbite circulaire basse autour de la terre, respectivement à 600 km et 400 km au-dessus de la Terre, dans le même plan. Le rayon de la terre est $R_T = 6400 km$; $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI est la constante universelle de gravitation.

16. Donner la force de gravitation exercée par la Terre, de masse M , sur l'astronaute et son équipement, de masse m .
17. Effectuer une analyse dimensionnelle sur \mathcal{G} afin de déterminer son unité dans le système international (en utilisant des m, des kg et des s).
18. Établir l'expression de l'énergie potentielle de gravitation.
19. En exprimant le principe fondamental de la dynamique pour un système en rotation uniforme, établir la troisième loi de Kepler. Exprimer l'énergie de l'astronaute sur son orbite, en fonction de \mathcal{G} , m , M et r rayon de l'orbite.

Pour rejoindre la station spatiale, l'astronaute envisage une orbite de transfert elliptique, dont l'apogée de distance r_H par rapport au centre de la Terre est sur l'orbite du télescope, et le périégée de distance r_S par rapport au centre de la terre est sur l'orbite de l'ISS.

20. Représenter la trajectoire suivie par l'astronaute.
21. Exprimer l'énergie de l'astronaute sur cette trajectoire en fonction de \mathcal{G} , M , m , r_H et r_S .
22. Exprimer la vitesse v_A de l'astronaute à l'apogée, en fonction de r_H , T_H et r_S . Par analogie, en déduire l'expression de la vitesse au périégée en fonction de r_S , T_S et r_H .
23. Estimer numériquement les ordres de grandeurs de ces deux vitesses.
24. Exprimer la durée Δt de ce voyage en fonction de T_H , r_S et r_H . Estimer numériquement la durée de ce voyage.

IV Chute de Schiaparelli de l'ESA

Le 19 octobre 2016 le module Schiaparelli envoyé par l'agence spatiale européenne (ESA) sur Mars ne s'est pas posé comme prévu. Après l'ouverture du parachute, le module a comme prévu éjecté son bouclier thermique à 7,8 km de hauteur. C'est à ce moment là que la situation a totalement échappé aux ingénieurs. On y voit aujourd'hui un peu plus clair. Peu après l'ouverture de son parachute, Schiaparelli a commis une erreur de calcul lui faisant « croire » qu'il se trouvait... à 2 kilomètres sous la surface de la planète rouge, alors qu'il était encore à 3,7 kilomètres d'altitude.

On pourrait pourtant croire que se poser sur Mars ne pose aucun problème, le 12 novembre 2014, le robot Philae de la mission Rosetta de l'ESA, se séparait de son orbiteur pour atterrir sur le sol de la comète 67P (bien plus petite que Mars !) à 510 millions de km de la Terre. Pourtant sur Mars deux contraintes viennent compliquer la mission : plus imposante qu'une comète Mars présente donc un champ de pesanteur plus important, l'accélération en est plus grande. De plus la faible densité de l'atmosphère sur Mars ne permet pas de générer des frottements suffisants à l'aide du parachute. Les ingénieurs de l'ESA ont pourtant trouvé des solutions à ces contraintes et cet échec ne serait en réalité dû qu'au dysfonctionnement d'un capteur. Alors que se poursuivait la descente, un capteur qui mesure les accélérations du module est resté calé sur son indication maximale pendant une seconde, soit plus longtemps que prévu (quelques millisecondes).

On considère le module Schiaparelli avec son parachute en chute avec frottements. Les forces sont :

- le poids \vec{P}
- la poussée d'Archimède de l'atmosphère $\vec{\Pi}$
- les frottements fluides de l'atmosphère \vec{f}

Du fait du faible frottement, la vitesse du module est très vite élevée et les frottements peuvent alors être modélisés par une force proportionnelle à la vitesse au carré :

$$\vec{f} = -\alpha \|\vec{v}\| \vec{v}$$

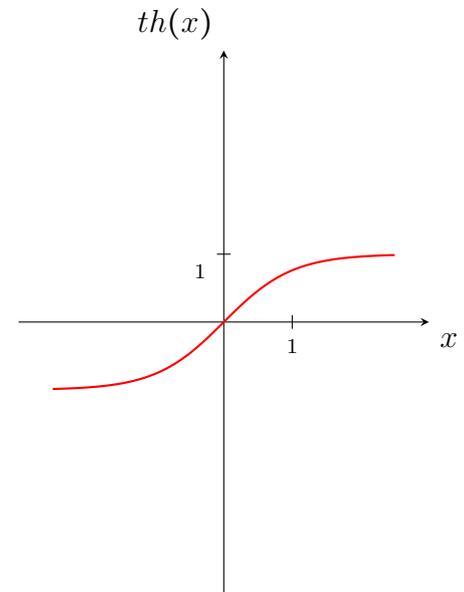
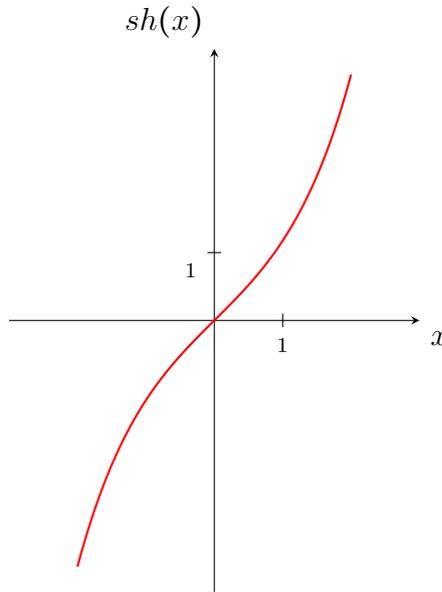
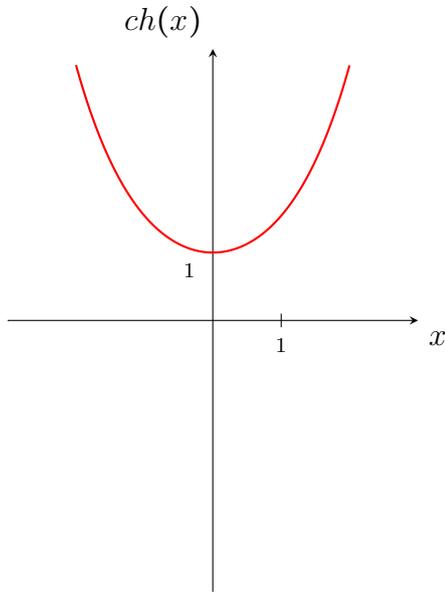
avec α une constante positive.

Pour cet exercice, on rappelle les fonctions trigonométriques hyperboliques.

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th}(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$



25. Établir l'équation différentielle (dite de Ricatti) vérifiée par la norme de la vitesse sous la forme :

$$\frac{dv}{dt} = g' - kv^2$$

en identifiant g' et k en fonction de g , Π , m et α

26. Établir l'expression de la vitesse limite v_{lim} atteinte en régime permanent en fonction de g' et k .
27. On pose le changement de variable $V = v - v_{lim}$. Établir l'équation différentielle vérifiée par V sous la forme suivante et identifier les constantes A et B :

$$\frac{dV}{dt} + AV + BV^2 = 0$$

28. Mettre cette équation sous la forme de l'équation différentielle suivante (dite de Bernoulli) :

$$\frac{dV/dt}{V^2} + A\frac{1}{V} + B = 0$$

29. On pose le changement de variable $W = 1/V$. Établir l'équation différentielle vérifiée par W sous la forme suivante et identifier la constante du terme de droite ainsi que K en fonction de k et v_{lim} .

$$\frac{dW}{dt} + KW = cste$$

30. Résoudre l'équation différentielle en W afin d'obtenir $W(t)$.
31. En déduire la solution de l'équation de Bernoulli $V(t)$.
32. En déduire la solution de l'équation de Ricatti $v(t)$.
33. Tracer l'allure de $v(t)$.
34. Quelle est la nature du mouvement en régime permanent ? Est-ce en accord avec le graphe de $v(t)$?

Bon courage et bon travail ! ☺