DS6C - Mécanique (2 heures)

Éléments de correction

I Cours

1. Voir cours et TEST.
2. Voir cours et TEST.
3. Voir cours et TEST.
4. Voir cours et TEST.
5. Voir cours et TEST.

II Microscope électronique à balayage

d'après Banque PT 2017 **Aspect électrique**

6. Une particule chargée est plongée dans un champ électrique est soumise à la force de Lorentz $\boxed{\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}}$
Le champ électrique s'exprime en V/m.

7. Calculons :
- le poids de l'électron : $m_e g \approx 10^{-30} \times 10 = 10^{-29} N$ (la masse d'un électron est de $9,1\,10^{-31} kg \approx 10.10^{-31} = 10^{-30}$)
- force de Lorentz (avec $E = 100 V.m^{-1}$) : $eE \approx 10^{-19} \times 100 = 10^{-17} N$

Ainsi $\dfrac{mg}{eE} \approx 10^{-12} \ll 1$: le poids de l'électron pourra être négligé devant la force de Lorentz électrique.

8. Plusieurs façons de répondre à la question :
- En utilisant l'énergie potentielle :
  Un système tend à toujours diminuer son énergie potentielle, avec l'énergie potentielle de l'électron qui s'écrit $E_p = -eV$.
  Or $V_1 > V_2$, donc $E_p(1) < E_p(2)$: la particule va donc se diriger vers la plaque portée au potentiel V_1. Il faudra donc l'injecter au niveau de la plaque de potentiel V_2.
- $U = V_1 - V_2 > 0 \Rightarrow V_1 > V_2$: la plaque de potentiel V_1 est la plaque chargée positivement, qui va donc attirer l'électron. L'électron doit donc être injecté au niveau de la plaque V_2.
- On a $V_1 > 0$ et $V_2 < 0$: le champ électrique est donc dirigé de V_1 à V_2. Or l'électron subit la force $\overrightarrow{F} = -e\overrightarrow{E}$ qui est de sens opposé à $\overrightarrow{E}$. Pour accélérer l'électron il faudra qu'il se dirige de V_2 à V_1.

9. Appliquons la loi de l'énergie cinétique entre la plaque de potentiel V_2 et la plaque de potentiel V_1 :
$\Delta_{2\to1} E_c = W_{2\to1}(\overrightarrow{F_E})$, avec :
$W_{2\to1}(\overrightarrow{F_E}) = -\Delta_{2\to1} E_p = -(-eV_1 + eV_2) = e(V_1 - V_2) = eU$
$\Delta_{2\to1} E_c = \dfrac{1}{2} m_e v^2$ (l'électron est injecté avec une vitesse nulle)
Ainsi $\dfrac{1}{2} m_e v^2 = eU$, soit $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m_e}}}$

Déflecteur magnétique

10. Une particule chargée est plongée dans un champ magnétique, subit la force de Lorentz $\boxed{\overrightarrow{F_B} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}}$
Le champ magnétique s'exprime en Tesla (T).

11. Ordres de grandeur :

Dispositif	Valeur du champ
À la surface de la Terre	$5\,10^{-5}T$
Aimant permanent usuel	0,1 T à 1 T
Bobines pour IRM	3 T

12. Comparons :

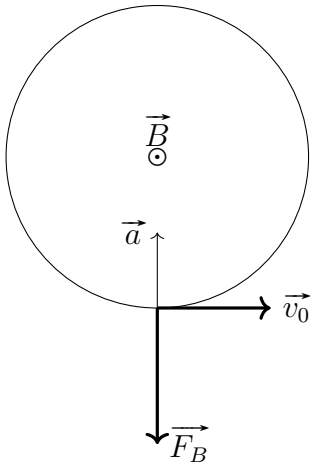
— Le poids de l'électron : $mg \approx 10^{-29}N$

— La force de Lorentz : $f_B \approx qvB \approx 10^{-19} \times 10^6 \times 1 = 10^{-13}N$

Ainsi $\dfrac{mg}{f_B} \approx 10^{-16} \ll 1$: le poids de l'électron pourra bien être négligé devant la force de Lorentz.

13. Appliquons la loi de la puissance cinétique à l'électron : $\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = P(\overrightarrow{F_B})$, avec $P(\overrightarrow{F_B}) = \left(-e\,\vec{v} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{v} = 0$, car $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est orthogonal à $\vec{v}$, par définition du produit vectoriel.

14. La trajectoire de l'électron injecté avec un vecteur vitesse orthogonal à $\vec{B}$ est circulaire, dans le plan perpendiculaire à $\vec{B}$ et contenant $\vec{v_0}$.



Le sens de la trajectoire circulaire se détermine à l'aide du sens de $\overrightarrow{F_B}$ et du PFD. En effet, d'après le PFD : $\vec{a} = -\dfrac{e}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$ doit être dirigé vers le centre de la trajectoire.

15. La trajectoire est circulaire uniforme donc $\vec{a} = -\dfrac{v_0}{R^2}\vec{u_r}$.

Prenons la norme du PFD : $m\dfrac{v_0^2}{R} = ev_0B$, car $\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{v}\| \times \|\vec{B}\|$, puisque $\vec{v} \perp \vec{B}$

Ainsi $\boxed{R = \dfrac{mv_0}{eB}}$

III Gravity

d'après oral CCP

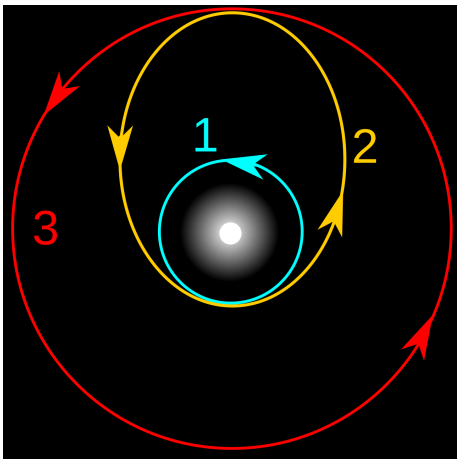
16. Par définition $\boxed{\overrightarrow{F_G} = -\mathcal{G}\frac{mM}{r^2}\vec{e_r}}$, il s'agit d'une force attractive.

17. Une force (en N) est équivalente à des kg.m.s^{-2} (car F = ma), il vient que $\mathcal{G}$ s'exprime en $\boxed{\mathrm{m^3.kg^{-1}.s^{-2}}}$.

18. Voir méthode dans le cours, on a $\overrightarrow{F_G} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}\vec{e_r}$, il vient $\boxed{E_p = -\mathcal{G}\frac{mM}{r}}$.

19. Voir démonstration dans le cours, pour un MCU, on a $-m\frac{v^2}{r}\vec{e_r} = -\mathcal{G}\frac{mM}{r^2}\vec{e_r}$. On retrouve alors $\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}}$.
L'énergie (à comprendre comme l'énergie totale, c'est-à-dire son énergie mécanique) est $E_m = E_c + E_p$, grâce au PFD pour un MCU on a $v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r}}$ et on a montré dans le cours qu'on obtient alors la simplification $\boxed{E_m = -\frac{\mathcal{G}mM}{2r}}$.

20. Il s'agit d'une orbite de transfert elliptique avec 2 l'orbite de transfert, 3 l'orbite de l'astronaute au télescope de rayon r_H et 1 l'orbite de l'ISS de rayon r_S.



21. Par généralisation du résultat sur un MCU, on a $\boxed{E_m = -\frac{\mathcal{G}mM}{2a} = -\frac{\mathcal{G}mM}{r_H+r_S}}$.

22. À l'apogée, l'astronaute est à distance r_H du centre de la Terre, donc son énergie est :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{\mathcal{G}mM}{r_H} = -\frac{\mathcal{G}mM}{r_H + r_S}$$

On utilise ensuite la troisième loi de Kepler pour remplacer $M\mathcal{G}$ avec la période T_H et il vient :

$$\boxed{v_A = \frac{2\pi r_H}{T_H}\sqrt{\frac{2r_S}{r_S+r_H}}}$$

Et par analogie :

$$\boxed{v_P = \frac{2\pi r_S}{T_S}\sqrt{\frac{2r_H}{r_S+r_H}}}$$

23. L'ordre de grandeur est de $\boxed{10^4 \text{ m.s}^{-1}}$ pour être précis $v_A = 7,5.10^3$ m.s^{-1} et $v_P = 7,7.10^3$ m.s^{-1}.

24. On utilise la loi de Kepler sur l'ellipse (avec $2a = r_S + r_H$ donc $a = (r_S + r_H)/2$. Il vient :

$$\frac{T_{transf}^2}{\left(\frac{r_S+r_H}{2}\right)^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M} = \frac{T_H^2}{r_H^3}$$

Comme l'astronaute ne parcourt que la moitié de l'ellipse, la durée du voyage est $\Delta t = T_{transf}/2$, il vient :

$$\frac{8 \times 4\Delta t^2}{(r_S + r_H)^3} = \frac{T_H^2}{r_H^3}$$

Soit finalement :

$$\boxed{\Delta t = \frac{T_H}{\sqrt{32}}\left(1 + \frac{r_S}{r_H}\right)^{3/2}}$$

L'ordre de grandeur donne environ $\boxed{1 \text{ h}}$ (47 min pour être précis).

IV Chute de Schiaparelli de l'ESA

25. On considère un objet de masse m en chute soumis à son poids, à la poussée d'Archimède et à des frottements de type $\vec{f} = -\alpha v^2 \vec{e_y}$. Par application du principe fondamental de la dynamique, il vient à une dimension sur un axe y vertical vers le bas :

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \Pi - kv^2$$

Soit alors : $\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g' - kv^2}$ si on identifie $\boxed{k = \alpha/m}$ et $\boxed{g' = g - \Pi/m}$.

26. La solution particulière en régime permanent, donne $\boxed{v_{lim} = \sqrt{\frac{g'}{k}}}$.

27. Le changement de variable donne alors $v = V + v_{lim}$, et comme v_{lim} est une constante, on a $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = g' - k(V + v_{lim}^2$$

On développe et on utilise l'expression de $v_{lim} = \sqrt{g'/k}$ pour simplifier, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + 2kv_{lim}V + kV^2 = 0$$

Soit par identification $\boxed{A = 2kv_{lim}}$ et $\boxed{B = k}$.

28. Il suffit de diviser l'expression précédente par V^2...

29. Si $W = 1/V$ alors $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}V/\mathrm{d}t}{V^2}$, ainsi on peut réécrire :

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + AW + B = 0$$

Soit encore :

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} - AW = B$$

Soit par identification $\boxed{K = -A = -2kv_{lim}}$ et $\boxed{cste = B = k}$.

30. Voir plus bas.

31. Voir plus bas.

32. Voir plus bas.

33. Allure de $th(x)$.

34. En régime permanent, la vitesse tends vers une constante ce qui est en accord avec l'asymptote horizontale pour le tracé de $th(x)$. Quelle est la nature du mouvement en régime permanent ? Est-ce en accord avec le graphe de $v(t)$?

Voici plus bas, quelques explications pour la résolution un peu plus technique (on suppose la vitesse initiale nulle, attention aux notations qui différent).

Bon courage et bon travail ! ☺

Une méthode numérique permet de s'apercevoir que ce modèle est quasiment parfait. Résolvons analytiquement cette équation, dite de Ricatti (on l'écrit $y' + ky^2 - g' = 0$).

Pour cela il faut une solution particulière. On peut par exemple chercher la vitesse limite. Elle sera atteinte quand l'accélération sera nulle, c'est-à-dire quand $y' = 0$, on en tire $ky^2 = g'$ et $y = \sqrt{\dfrac{g'}{k}}$. Posons $y_0 = \sqrt{\dfrac{g'}{k}}$. On vérifie sans peine que y_0 est solution de l'équation.

Faisons le changement de variables $Y = y - y_0$, soit $y = Y + y_0$, l'équation donne

$$(Y + y_0)' + k(Y + y_0)^2 - g' = 0$$

soit

$$Y' + kY^2 + 2ky_0Y + ky_0^2 - g' = 0$$

mais $ky_0^2 - g' = 0$, et l'équation prend alors la forme

$$Y' + 2ky_0Y + kY^2 = 0,$$

et en divisant par Y^2 (il faudrait s'assurer que Y ne prend jamais la valeur 0 mais bon...),

$$\frac{Y'}{Y^2} + 2ky_0\,\frac{1}{Y} + k = 0.$$

Pour résoudre cette nouvelle équation, dite de Bernouilli, on effectue le changement de variable $z = \dfrac{1}{Y}$. Il en résulte que $z' = -\dfrac{Y'}{Y^2}$ et l'équation se simplifie encore. Il reste maintenant :

$$-z' + 2ky_0z + k = 0 \quad \text{soit} \quad z' = 2ky_0z + k.$$

Cette équation différentielle linéaire du premier ordre admet pour solutions

$$z = Ce^{2ky_0t} - \frac{1}{2y_0} = \frac{2Cy_0e^{2ky_0t} - 1}{2y_0} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{R}$$

Et en remontant,

$$Y = \frac{1}{z} = \frac{2y_0}{2Cy_0e^{2ky_0t} - 1}$$

puis

$$y = y_0 + Y = y_0 + \frac{2y_0}{2Cy_0e^{2ky_0t} - 1} = y_0\,\frac{2Cy_0e^{2ky_0t} + 1}{2Cy_0e^{2ky_0t} - 1}$$

Pour déterminer C, supposons que l'objet soit lâché sans vitesse initiale, c'est-à-dire $y = 0$ à $t = 0$. Cela conduit à

$$2Cy_0 + 1 = 0 \iff C = -\frac{1}{2y_0},$$

donc en remplaçant C par sa valeur :

$$\boxed{y = y_0\,\frac{e^{2ky_0t} - 1}{e^{2ky_0t} + 1}}$$

A l'aide de la fonction tangente hyperbolique, l'expression n'est que plus belle :

$$\boxed{y = y_0\,\mathrm{th}(ky_0t)}$$