TEST08 - Électricité

⚠ ➔ Encadrer les résultats

---

1. Soit une fonction $x(t)$. Écrire la forme canonique générale d'une équation différentielle du second ordre de type oscillateur harmonique vérifiée par $x(t)$ en posant une pulsation propre ω_0 et en imposant un second membre nul.

2. Soit l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 4x = 12$$

la résoudre et donner $x(t)$ pour $x(0) = 2$ et $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)(t = 0) = 0$.

3. Établir l'équation différentielle (sous forme canonique) vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur dans un circuit RLC série soumis à un échelon de tension E.

4. Donner la solution homogène d'une équation différentielle d'ordre 2 dont le discriminant de l'équation caractéristique est négatif.

5. Établir l'équation différentielle (sous forme canonique) vérifiée par la tension u_L aux bornes de la bobine dans un circuit RLC série soumis à un échelon de tension E.

Corrigé

1.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0$$

2. La solution est de la forme :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + x_P$$

avec ici $\omega_0 = \sqrt{4} = 2$ et $x_P = 12/4 = 3$. Donc :

$$x(t) = A\cos(2t + \varphi) + 3$$

On calcule la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -2A\sin(2t + \varphi)$$

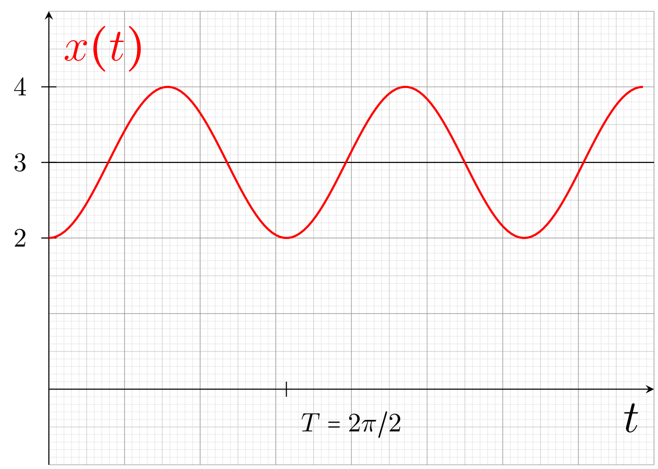
Puis on applique alors les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) & = 2 = A\cos(\varphi) + 3 \\ \dot{x}(0) & = 0 = -2A\sin(\varphi) \end{cases}$$

On traite la deuxième pour obtenir $\varphi = 0$ et il vient ensuite dans la première $A = -1$. Soit finalement :

$$x(t) = -\cos(2t) + 3$$

que l'on ne demande pas de tracer mais voici l'allure :



3. La loi des mailles nous donne :

$$E = u_R + u_L + u_C$$

il vient :

$$E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_C$$

or :

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

et :

$$u_C = \frac{q}{C}$$

donc :

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

soit alors :

$$E = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C$$

soit finalement sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{E}{LC}$$

4. Pour l'équation de la forme :

$$\ddot{u_C} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u_C} + \omega_0^2 uC = 0$$

dont le polynôme caractéristique est :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

si le discriminant est négatif, on est en présence d'un régime pseudo-périodique. La solution homogène est alors de la forme :

$$u_{CH}(t) = Ae^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos\left(\omega_p t + \varphi\right)$$

avec :

$$\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

on rappelle qu'en SII, on la retient sous la forme :

$$\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

avec le facteur d'amortissement ξ lié au facteur de qualité Q par :

$$\xi = \frac{1}{2Q}$$

5. La loi des mailles nous donne :

$$E = u_R + u_L + u_C$$

il vient :

$$E = Ri + u_L + \frac{q}{C}$$

on dérive :

$$0 = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

or :

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

donc :

$$0 = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i$$

or :

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

donc :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{L}u_L$$

il vient :

$$0 = \frac{R}{L}u_L + \frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i$$

on dérive :

$$0 = \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2u_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

soit alors :

$$0 = \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2u_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}u_L$$

soit finalement sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_L = 0$$