TEST09 - Électricité

⚠ ➔ Encadrer les résultats

---

1. Établir l'équation différentielle (sous forme canonique) vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur dans un circuit RLC série soumis à un échelon de tension E.

2. Donner la solution homogène d'une équation différentielle d'ordre 2 dont le discriminant de l'équation caractéristique est négatif.

3. Soit une fonction $x(t)$. Écrire la forme canonique générale d'une équation différentielle du premier ordre vérifiée par $x(t)$ en posant une constante τ et en imposant un second membre nul.

4. Soit une fonction $x(t)$. Écrire la forme canonique générale d'une équation différentielle du second ordre de type oscillateur harmonique vérifiée par $x(t)$ en posant une pulsation propre ω_0 et en imposant un second membre nul.

5. Soit une fonction $x(t)$. Écrire la forme canonique générale d'une équation différentielle du second ordre vérifiée par $x(t)$ en posant une pulsation propre ω_0, un facteur de qualité Q et en imposant un second membre nul.

Corrigé

1. La loi des mailles nous donne :

$$E = u_R + u_L + u_C$$

il vient :

$$E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_C$$

or :

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

et :

$$u_C = \frac{q}{C}$$

donc :

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

soit alors :

$$E = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C$$

soit finalement sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{E}{LC}$$

2. Pour l'équation de la forme :

$$\ddot{u_C} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u_C} + \omega_0^2 uC = 0$$

dont le polynôme caractéristique est :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

si le discriminant est négatif, on est en présence d'un régime pseudo-périodique. La solution homogène est alors de la forme :

$$u_{CH}(t) = Ae^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos\left(\omega_p t + \varphi\right)$$

avec :

$$\omega_p = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

on rappelle qu'en SII, on la retient sous la forme :

$$\omega_p = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$$

avec le facteur d'amortissement ξ lié au facteur de qualité Q par :

$$\xi = \frac{1}{2Q}$$

3.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}x = 0$$

4.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0$$

5.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0$$