TEST17 - Mécanique

⚠ ➔ Encadrer les résultats

---

1. Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, exprimer le vecteur $\vec{a}$ en fonction du rayon R et de la norme v de la vitesse. Exprimer également la norme a de l'accélération.

2. Etablir l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ dans le cas le plus général en repère cylindrique.

3. Etablir l'expression de la portée D d'un tir sans frottements avec conditions initiales :

$$x(0) = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$v_x(0) = v_0 \cos\alpha$$

$$v_y(0) = v_0 \sin\alpha$$

4. Etablir l'équation du mouvement (équation différentielle) vérifiée par l'angle θ pour un pendule simple.

5. Etablir l'expression de la vitesse d'impact lors d'une chute libre de hauteur h.

Corrigé

1. Pour un mouvement circulaire uniforme, on arrive à :

$$\overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}$$

et avec :

$$\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

il vient :

$$\overrightarrow{a} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r}$$

et également :

$$\|\overrightarrow{a}\| = \frac{v^2}{R}$$

2. À savoir faire à la perfection !

$$\overrightarrow{OM} = r\ \overrightarrow{e_r} + z\ \overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\ \overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\ \overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\ \overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\ \overrightarrow{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\ \overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\ \overrightarrow{e_z}$$

3. Soit une masse m lancée depuis l'origine O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale (c'est à cela que correspondent les conditions initiales). La masse est uniquement soumise à son poids $\overrightarrow{P}$, on choisit un repère Oxy de manière standard, le PFD nous donne :

$$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g}$$

soit en projection sur Ox et Oy :

$$m\ddot{x} = 0$$

$$m\ddot{y} = -mg$$

En intégrant une première fois, on a :

$$\dot{x} = cste_1$$

$$\dot{y} = -gt + cste_2$$

les conditions initiales donnent :

$$\dot{x}(0) = v_x(0) = v_0 \cos\alpha = cste_1$$

$$\dot{y}(0) = v_y(0) = v_0 \sin\alpha = -g \times 0 + cste_2$$

finalement :

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha$$

$$\dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha$$

On intègre une seconde fois, il vient :

$$x = v_0 \cos\alpha t + cste_3$$

$$y = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin\alpha t + cste_4$$

Les conditions initiales donnent alors :

$$x(0) = 0 = v_0 \cos\alpha \times 0 + cste_3$$

$$y(0) = 0 = -\frac{g}{2} \times 0 \times 0 + v_0 \sin\alpha \times 0 + cste_4$$

donc $cste_3 = 0$ et $cste_4 = 0$. Finalement :

$$x = v_0 \cos(\alpha) t$$

$$y = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin(\alpha) t$$

On isole t dans x et on remplace dans y, on a l'équation de la trajectoire :

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + \tan(\alpha)x$$

ce qui est l'équation d'une parabole. Pour trouver la portée, on cherche la position $x = D$ telle que $y = 0$, il vient alors :

$$D = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g}$$

4. Pour un pendule simple il existe deux façons d'arriver à l'équation du mouvement :

— par le PFD :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T}$$

soit en base polaire pour un mouvement circulaire (mais non uniforme !) :

$$-m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T$$

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

la deuxième équation amène à :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

— par la conservation de l'énergie mécanique (qui n'est qu'une autre formulation du théorème de l'énergie cinétique) :

$$E_m = E_c + E_{pp} = cste$$

soit :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\ell\left(1 - \cos\theta\right) = cste$$

IMPORTANT : il faut savoir refaire le raisonnement permettant d'aboutir à l'expression de E_{pp} sur un schéma !

Avec en base polaire :

$$v = \ell\dot{\theta}$$

on a :

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\left(1 - \cos\theta\right) = cste$$

Soit alors :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$$

ATTENTION : on dérive par rapport au temps t et non par rapport à θ, des termes $\ddot{\theta}$ et $\dot{\theta}$ apparaissent. Il s'agit de :

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

et :

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

on a alors :

$$m\ell^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mg\ell\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

qui amène à nouveau à :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

$\boxed{\textbf{5.}}$ REMARQUE le vecteur déplacement élémentaire s'exprime TOUJOURS (en base cartésienne) par :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}x\ \overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\ \overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\ \overrightarrow{e_z}$$

Le plus rapide est de passer par une approche énergétique. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre l'instant initial au point A de hauteur h, de vitesse nulle et l'instant final au point B d'altitude 0 et de vitesse d'impact v donne :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W_{AB}(\overrightarrow{P})$$

pour un axe Oz vertical ascendant :

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = \int_A^B -mg\ \overrightarrow{e_z}.\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = \int_A^B -mg\ \overrightarrow{e_z}.dz\ \overrightarrow{e_z}$$

<u>POINT IMPORTANT ICI</u> :

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = -mg[z]_A^B$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = -mg\left(z_B - z_A\right)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = -mg\left(0 - h\right)$$

soit :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

finalement :

$$v = \sqrt{2gh}$$