TEST18 - Mécanique

⚠ ➔ Encadrer les résultats

---

1. Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, exprimer le vecteur $\overrightarrow{a}$ en fonction du rayon R et de la norme v de la vitesse. Exprimer également la norme a de l'accélération.

2. Etablir l'équation du mouvement (équation différentielle) vérifiée par l'angle θ pour un pendule simple.

3. Donner le théorème de l'énergie cinétique.

4. Etablir l'expression de la vitesse d'impact lors d'une chute libre de hauteur h.

5. Etablir l'équation du mouvement (équation différentielle) vérifiée par l'angle θ pour un pendule simple par une approche énergétique.

Corrigé

1. Pour un mouvement circulaire uniforme, on arrive à :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e_r}$$

et avec :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

il vient :

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e_r}$$

et également :

$$\|\vec{a}\| = \frac{v^2}{R}$$

2. Pour un pendule simple il existe deux façons d'arriver à l'équation du mouvement :

— par le PFD :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

soit en base polaire pour un mouvement circulaire (mais non uniforme !) :

$$-m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T$$

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

la deuxième équation amène à :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

— par la conservation de l'énergie mécanique (qui n'est qu'une autre formulation du théorème de l'énergie cinétique) :

$$E_m = E_c + E_{pp} = cste$$

soit :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\ell\left(1-\cos\theta\right) = cste$$

IMPORTANT : il faut savoir refaire le raisonnement permettant d'aboutir à l'expression de E_{pp} sur un schéma !

Avec en base polaire :

$$v = \ell\dot{\theta}$$

on a :

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\left(1-\cos\theta\right) = cste$$

Soit alors :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$$

ATTENTION : on dérive par rapport au temps t et non par rapport à θ, des termes $\ddot{\theta}$ et $\dot{\theta}$ apparaissent. Il s'agit de :

$$\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$$

et :

$$\left(\cos u\right)' = -u'\sin u$$

on a alors :

$$m\ell^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mg\ell\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

qui amène à nouveau à :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ La variation d'énergie cinétique lors du mouvement d'un système d'un point A à un point B est égale à la somme des travaux des forces extérieures s'appliquant sur le système :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{AB}(\vec{F})$$

4. REMARQUE le vecteur déplacement élémentaire s'exprime TOUJOURS (en base cartésienne) par :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}x\ \overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\ \overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\ \overrightarrow{e_z}$$

Le plus rapide est de passer par une approche énergétique. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre l'instant initial au point A de hauteur h, de vitesse nulle et l'instant final au point B d'altitude 0 et de vitesse d'impact v donne :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W_{AB}(\overrightarrow{P})$$

pour un axe Oz vertical ascendant :

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = \int_A^B -mg\ \overrightarrow{e_z}.\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = \int_A^B -mg\ \overrightarrow{e_z}.dz\ \overrightarrow{e_z}$$

POINT IMPORTANT ICI :

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = -mg[z]_A^B$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = -mg\left(z_B - z_A\right)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = -mg\left(0 - h\right)$$

soit :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

finalement :

$$v = \sqrt{2gh}$$

5. Par la conservation de l'énergie mécanique (qui n'est qu'une autre formulation du théorème de l'énergie cinétique) :

$$E_m = E_c + E_{pp} = cste$$

soit :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\ell\left(1 - \cos\theta\right) = cste$$

IMPORTANT : il faut savoir refaire le raisonnement permettant d'aboutir à l'expression de E_{pp} sur un schéma !

Avec en base polaire :

$$v = \ell\dot{\theta}$$

on a :

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\left(1 - \cos\theta\right) = cste$$

Soit alors :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$$

ATTENTION : on dérive par rapport au temps t et non par rapport à θ, des termes $\ddot{\theta}$ et $\dot{\theta}$ apparaissent. Il s'agit de :

$$\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$$

et :

$$(\cos u)' = -u'\sin u$$

on a alors :

$$m\ell^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mg\ell\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

qui amène à nouveau à :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

REMARQUE : on peut utiliser le théorème de la puissance mécanique (sans forces Non Conservatives ici) :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = P(\overrightarrow{F}_{NC}) = 0$$

ou le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = P(\overrightarrow{F})$$