TEST19 - Mécanique

⚠ ➔ Encadrer les résultats

---

1. Etablir l'équation du mouvement (équation différentielle) vérifiée par l'angle θ pour un pendule simple par 2 méthodes.

2. Établir l'équation différentielle (sous forme canonique) vérifiée par la position Z d'une masse pour un système masse-ressort vertical soumis également à une force de frottement fluide de type $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v}$. On posera Z la position par rapport à la position d'équilibre.

3. Pour le système masse-ressort vertical, établir l'expression de la position d'équilibre z_{eq} en fonction de ℓ_0, m, g et k.

4. Donner l'expression de la force de Lorentz.

5. Établir l'expression du rayon de courbure de la trajectoire d'une particule chargée en mouvement dans un champ $\overrightarrow{B}$.

Corrigé

1. Pour un pendule simple il existe ici deux façons d'arriver à l'équation du mouvement :

— par le PFD :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

soit en base polaire pour un mouvement circulaire (mais non uniforme !) :

$$-m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T$$

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

la deuxième équation amène à :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

— par la conservation de l'énergie mécanique (qui n'est qu'une autre formulation du théorème de l'énergie cinétique) :

$$E_m = E_c + E_{pp} = cste$$

soit :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\ell\left(1 - \cos\theta\right) = cste$$

IMPORTANT : il faut savoir refaire le raisonnement permettant d'aboutir à l'expression de E_{pp} sur un schéma !

Avec en base polaire :

$$v = \ell\dot{\theta}$$

on a :

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\left(1 - \cos\theta\right) = cste$$

Soit alors :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$$

ATTENTION : on dérive par rapport au temps t et non par rapport à θ, des termes $\ddot{\theta}$ et $\dot{\theta}$ apparaissent. Il s'agit de :

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

et :

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

on a alors :

$$m\ell^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mg\ell\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

qui amène à nouveau à :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

REMARQUE : on peut utiliser le théorème de la puissance mécanique (sans forces Non Conservatives ici) :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = P(\vec{F}_{NC}) = 0$$

ou le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = P(\vec{F})$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ On pose un axe z vertical descendant avec origine à la position d'équilibre. Le PFD appliqué à la masse dans le référentiel terrestre nous donne :

$$m\vec{a} = \vec{P} - k(\ell - \ell_0)\vec{e_z} - \lambda\vec{v}$$

il vient en projection sur $\vec{e_z}$:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = mg - k(\ell - \ell_0) - \lambda\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

une étude à l'équilibre, permet de montrer que $z = \ell_{eq} + Z$ avec z la position par rapport à l'origine. De plus une étude à l'équilibre permet d'établir que :

$$\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$$

tout calcul fait, il vient finalement :

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}Z = 0$$

3. À l'équilibre de la masse, on a :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

soit avec un axe Oz vertical descendant :

$$mg - k(\ell - \ell_0) = 0$$

ou encore :

$$mg - k(z - \ell_0) = 0$$

on est à l'équilibre, donc :

$$z = z_{eq}$$

finalement :

$$z_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$$

4. L'action d'un champ électrique et d'un champ magnétique sur une particule chargée est :

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} \; + \; q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

5. La composante magnétique de la force de Lorentz est :

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

une particule chargée en mouvement dans un champ $\overrightarrow{B}$ suit un mouvement circulaire. De plus comme cette force ne travaille jamais, la norme de la vitesse se conserve, et ainsi le mouvement est également uniforme, on a donc un MCU. Soit :

$$-m\frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r} = -qvB\overrightarrow{e_r}$$

il vient :

$$m\frac{v^2}{R} = qvB$$

finalement :

$$R = \frac{mv}{qB}$$