TEST20 - Mécanique

⚠ ➔ Encadrer les résultats

---

1. Résoudre : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$, pour $x_{eq} = 4$ et avec les conditions initiales :

$$x(0) = 10 \text{ et } \dot{x}(0) = 0$$

2. Donner l'expression de la force de Lorentz.

3. Établir l'expression du rayon de courbure de la trajectoire d'une particule chargée en mouvement dans un champ $\vec{B}$.

4. Donner le théorème du moment cinétique pour un point matériel en rotation par rapport à un centre O.

5. Etablir l'équation du mouvement (équation différentielle) vérifiée par l'angle θ pour un pendule simple par application du TMC.

Corrigé

1. On a :

$$x(t) = x_H(t) + x_P$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + x_P$$

La solution particulière x_P est choisie constante, donc $\dot{x}_P = 0$ et $\ddot{x}_P = 0$. Ainsi dans l'équation de départ :

$$0 + \omega_0^2 x_P = \omega_0^2 x_{eq}$$

il vient :

$$x_P = x_{eq} = 4$$

soit alors :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + 4$$

On peut calculer la dérivée :

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

et appliquer les conditions initiales :

$$x(0) = A\cos(\varphi) + 4 = 10$$

$$\dot{x}(0) = -A\omega_0 \sin(\varphi) = 0$$

on en tire alors d'abord :

$$\varphi = 0$$

puis :

$$A = 6$$

finalement :

$$x(t) = 6\cos(\omega_0 t) + 4$$

2. L'action d'un champ électrique et d'un champ magnétique sur une particule chargée est :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

3. La composante magnétique de la force de Lorentz est :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

une particule chargée en mouvement dans un champ $\vec{B}$ suit un mouvement circulaire. De plus comme cette force ne travaille jamais, la norme de la vitesse se conserve, et ainsi le mouvement est également uniforme, on a donc un MCU. Soit :

$$-m\frac{v^2}{R}\vec{e_r} = -qvB\vec{e_r}$$

il vient :

$$m\frac{v^2}{R} = qvB$$

finalement :

$$R = \frac{mv}{qB}$$

4.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L_O}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{F_{ext}})}$$

5. Par le TMC (voir cours) :

$$\vec{M}_O(\vec{T}) = \vec{0}$$

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = -mg\ell\sin\theta\vec{e_z}$$

on a aussi :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = m\ell^2\dot{\theta}\vec{e_z}$$

soit alors avec le TMC :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_O(\vec{P})$$

donc en projection sur $\overrightarrow{e_z}$:

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta$$

finalement :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$