TEST21 - Mécanique

⚠ ➔ Encadrer les résultats

---

1. Établir l'expression de l'énergie potentielle associée à la force conservative :

$$\overrightarrow{F} = -\mathcal{G}\frac{mM}{r^2}\ \overrightarrow{e_r}$$

2. Établir l'expression de l'énergie potentielle effective pour un objet de masse m soumis à la seule force d'attraction gravitationnelle.

3. Etablir l'expression de l'énergie potentielle associée à la force conservative :

$$\overrightarrow{F} = -k\left(\ell - \ell_0\right)\ \overrightarrow{e_x}$$

4. Établir l'expression de l'altitude d'un satellite géostationnaire sur Terre (on rappelle $\mathcal{G} \approx 10^{-11}$ et $M_T \approx 10^{24}$ en SI). Application numérique en ordre de grandeur.

5. Établir la loi de Kepler sur les périodes, dans le cas d'un mouvement circulaire.

Corrigé

1. La force est conservative, elle dérive donc d'une énergie potentielle. On a :

$$F = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}$$

(à une dimension si la force dépend de r ce qui est le cas ici). L'énergie potentielle est donc une primitive de cette force :

$$E_p = -\int F.\mathrm{d}r$$

soit :

$$E_p = -\int \left(-\mathcal{G}\frac{mM}{r^2}\right).\mathrm{d}r$$

$$E_p = -\mathcal{G}\frac{mM}{r} + cste$$

la constante est prise nulle, en supposant que l'interaction ressentie à l'infini tend vers 0, soit :

$$E_p = -\mathcal{G}\frac{mM}{r}$$

2. Dans ce cas, on a :

$$\overrightarrow{OM} = r\ \overrightarrow{e_r}$$

et :

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\ \overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\ \overrightarrow{e_\theta}$$

de plus la force d'attraction gravitationnelle, s'écrit :

$$\overrightarrow{F_G} = -\mathcal{G}\frac{mM}{r^2}\ \overrightarrow{e_r}$$

On a alors :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G}\frac{mM}{r}$$

soit :

$$E_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right) - \mathcal{G}\frac{mM}{r}$$

De plus :

$$\mathcal{C} = r^2\dot{\theta} = cste$$

soit :

$$\dot{\theta} = \frac{\mathcal{C}}{r^2}$$

il vient :

$$E_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{\mathcal{C}^2}{r^2}\right) - \mathcal{G}\frac{mM}{r}$$

on identifie alors :

$$E_m = E_{c,radial} + E_{p,eff}$$

soit l'énergie potentielle effective :

$$E_{p,eff} = \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{C}^2}{r^2} - \mathcal{G}\frac{mM}{r}$$

3. La force est conservative, elle dérive donc d'une énergie potentielle. L'énergie potentielle est donc une primitive de cette force :

$$E_p = -\int F.\mathrm{d}\ell$$

soit :

$$E_p = -\int \left(-k\left(\ell - \ell_0\right)\right).\mathrm{d}\ell$$

$$E_p = \frac{1}{2}k\left(\ell - \ell_0\right)^2 + cste$$

on choisit $E_p = 0$ pour $\ell = \ell_0$ (à vide) :

$$E_p = \frac{1}{2}k\left(\ell_0 - \ell_0\right)^2 + cste = 0$$

soit :

$$cste = 0$$

finalement :

$$E_p = \frac{1}{2}k\left(\ell - \ell_0\right)^2$$

$\boxed{\textbf{4.}}$ Le satellite n'est soumis qu'à la force d'interaction gravitationnelle (centrale et conservative) et est en mouvement circulaire uniforme, le PFD amène :

$$m\,\vec{a} = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{r^2}\,\vec{e_r}$$

soit alors avec la cinématique du MCU :

$$-m\frac{v^2}{r} = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{r^2}$$

on peut définir la vitesse (constante ici) comme :

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

il vient :

$$-m\frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r} = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{r^2}$$

on simplifie :

$$\frac{4\pi^2 r^3}{T^2} = \mathcal{G}M_T$$

(on retrouve la loi de Kepler) et on isole :

$$r = \sqrt[3]{\frac{\mathcal{G}M_T T^2}{4\pi^2}}$$

l'application numérique amène à :

$$r \approx 42000 \text{ km}$$

ATTENTION, ne pas oublier de retrancher le rayon terrestre ($R_T = 6400$ km) pour arriver à l'altitude :

$$h = r - R_T \approx 36000 \text{ km}$$

Sinon on peut utiliser directement la loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}$$

On pose directement que la période du satellite doit être égale à celle de la rotation propre de la Terre (géostationnaire impliquant que le satellite suive un point fixe au dessus de la Terre). Soit :

$$T = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$$

l'application numérique, avec $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}$ et $M_T = 6.10^{24}$ amène à :

$$r \approx 42000 \text{ km}$$

soit une altitude :

$$h = r - R_T \approx 36000 \text{ km}$$

$\boxed{\textbf{5.}}$ Pour un système soumis uniquement à la force d'attraction gravitationnelle (force centrale conservative), l'application du TMC donne :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{0}$$

ainsi la quantité $\mathcal{C} = r^2\dot{\theta}$ se conserve, il en résulte que le mouvement circulaire est nécessairement uniforme. On applique alors le PFD pour un MCU, en projetant sur $\overrightarrow{e_r}$, il vient :

$$-m\frac{v^2}{R} = -\mathcal{G}\frac{mM}{R^2}$$

avec la vitesse définie par :

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

où T est la période de révolution (durée pour faire le tour), il vient alors :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}$$