

# **Compte-rendu de TP N°16 : Viscosimètre**

Chute d'une bille dans un fluide visqueux

MARINI, BOULCH, BARTHE-BITEAUD, CHOUAIEB

# 1 Objectif

Déterminer la viscosité dynamique  $\eta$  du glycérol en étudiant la chute verticale d'une bille en acier, et confronter le modèle de Stokes aux résultats expérimentaux en tenant compte des effets de bords.

## 2 Hypothèses

- Le référentiel terrestre est supposé galiléen.
- La bille atteint une vitesse limite constante.

## 3 Matériel et équipements

- Éprouvette contenant du glycérol ( $\rho_f = 1260 \text{ kg m}^{-3}$ ).
- Bille en acier ( $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$ , rayon  $r$ ).
- Système d'acquisition vidéo et logiciel de pointage (LatisPro).

## 4 Principe théorique

### Question 1 : Équation différentielle

*Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse  $v(t)$  de la bille.*

Bilan des forces s'exerçant sur la bille dans le référentiel du laboratoire (axe  $Oz$  vertical descendant) :

- Le poids :  $\vec{P} = m\vec{g}$
- La poussée d'Archimète :  $\vec{\Pi} = -m_f\vec{g} = -\rho_f V\vec{g}$
- La force de frottement fluide (Stokes) :  $\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$

D'après la seconde loi de Newton ( $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ), en projection sur ( $Oz$ ) :

$$ma = mg - \rho_f V g - 6\pi\eta r v$$

En remplaçant  $a$  par  $\frac{dv}{dt}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= mg - \rho_f V g - 6\pi\eta r v \\ m \frac{dv}{dt} + 6\pi\eta r v &= mg - \rho_f V g \\ \frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta r}{m} v &= g \left(1 - \frac{\rho_f V}{m}\right) \end{aligned}$$

### Question 2 : Constante de temps et vitesse limite

On a :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta r}{m} v = g \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right)$$

et on reconnaît :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = \frac{v_{lim}}{\tau}$$

Par identification :

- **Constante de temps** :  $\tau = \frac{m}{6\pi\eta r}$
- **Vitesse limite** :  $v_{lim} = \tau g \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right) = \frac{2r^2 g(\rho - \rho_f)}{9\eta}$

## 5 Protocole expérimental

Le protocole suit les étapes de pointage vidéo décrites dans le sujet : étalonnage, placement des axes, et pointage manuel des positions successives de la bille lors de sa chute dans l'éprouvette.

## 6 Réalisation

Les mesures ont été effectuées via le logiciel LatisPro. Les données de position  $z(t)$  et de vitesse  $v(t)$  ont été extraites.

## 7 Observations et interprétations qualitatives

On observe sur les courbes (voir section suivante) que la vitesse augmente initialement (régime transitoire) avant de se stabiliser autour d'une valeur constante (régime permanent), validant l'hypothèse de l'existence d'une vitesse limite.

## 8 Résultats quantitatifs

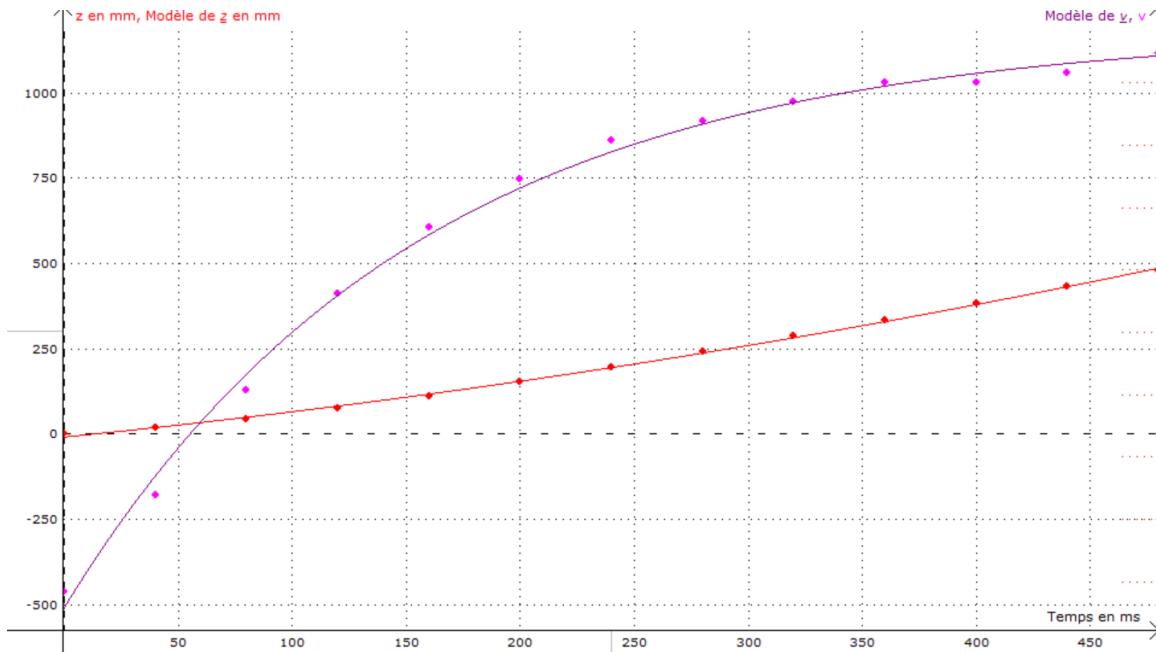


FIGURE 1 – Évolution temporelle de la position  $z(t)$  (courbe verte) et de la vitesse  $v(t)$  (courbe violette) modélisées dans LatisPro.

## 9 Analyse des résultats

### Question 3 : Calcul de la masse

Données :  $\rho_{acier} = 7800 \text{ kg m}^{-3}$  et  $r = 1,25 \text{ mm} = 1,25 \times 10^{-3} \text{ m}$ .

$$m = \rho V = \rho \times \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$m = 7800 \times \frac{4}{3} \pi (12,5 \times 10^{-3})^3 \approx 6,38 \times 10^{-2} \text{ kg} \approx 0,064 \text{ kg} = 64 \text{ g}$$

## Question 4 : Résolution de l'équation différentielle

L'équation différentielle du mouvement établie en Q2 s'écrit :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = \frac{v_{lim}}{\tau}$$

La solution générale  $v(t)$  est la somme de la solution de l'équation homogène ( $v_h$ ) et d'une solution particulière ( $v_p$ ) :

$$v(t) = v_h(t) + v_p$$

### 1. Solution de l'équation homogène ( $v_h$ ) :

On résout l'équation sans second membre  $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$ . La solution est de la forme :

$$v_h(t) = Ae^{-t/\tau}$$

avec  $A$  une constante d'intégration réelle.

### 2. Solution particulière ( $v_p$ ) :

On cherche une solution constante (régime permanent) vérifiant l'équation complète. Si  $v$  est constante,  $\frac{dv}{dt} = 0$ , d'où :

$$\frac{v_p}{\tau} = \frac{v_{lim}}{\tau} \implies v_p = v_{lim}$$

L'expression générale de la vitesse est donc :

$$v(t) = Ae^{-t/\tau} + v_{lim}$$

### Détermination de la constante $A$ (Conditions initiales) :

À l'instant  $t = 0$ , la bille est lâchée sans vitesse initiale, donc  $v(0) = 0$ .

$$v(0) = A \cdot e^0 + v_{lim} = 0$$

$$A + v_{lim} = 0 \implies A = -v_{lim}$$

En réinjectant  $A$  dans l'équation, on obtient l'expression finale de la vitesse :

$$v(t) = -v_{lim}e^{-t/\tau} + v_{lim}$$

Soit en factorisant :

$$v(t) = v_{lim} \left( 1 - e^{-t/\tau} \right)$$

## Question 5 : Déduction de la viscosité $\eta$

D'après la modélisation sur le graphe (Figure 1), la vitesse limite expérimentale est :

$$v_{lim} \approx 1,284 \text{ m s}^{-1}$$

En inversant la formule de la vitesse limite trouvée en Q2 :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{2r^2g(\rho - \rho_f)}{9v_{lim}} \\ \eta &= \frac{2 \times (1,25 \times 10^{-3})^2 \times 9,81 \times (7800 - 1260)}{9 \times 1,284} \\ \eta &\approx 1,74 \text{ Pas} \end{aligned}$$

La valeur théorique est  $\eta_{th} = 1,49 \text{ Pas}$ . L'écart relatif est d'environ 16%.

## Conversion de l'unité (Pas en unités de base)

Pour montrer que le Pascal-seconde (Pa.s) équivaut à des  $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$ , on décompose les unités :

1. **Le Pascal (Pa)** est une pression, soit une force divisée par une surface :

$$\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

2. **Le Newton (N)** est une force ( $F = ma$ ), soit une masse fois une accélération :

$$\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m s}^{-2}$$

3. **Substitution** : On remplace N dans l'expression du Pascal :

$$\text{Pa} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m}^2} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

4. **Résultat final** : On multiplie par la seconde (s) pour avoir des Pa·s :

$$\text{Pa} \cdot \text{s} = (\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}) \times \text{s}$$

$$\boxed{\text{Pa} \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}}$$

## Question 6 : Modélisation du frottement

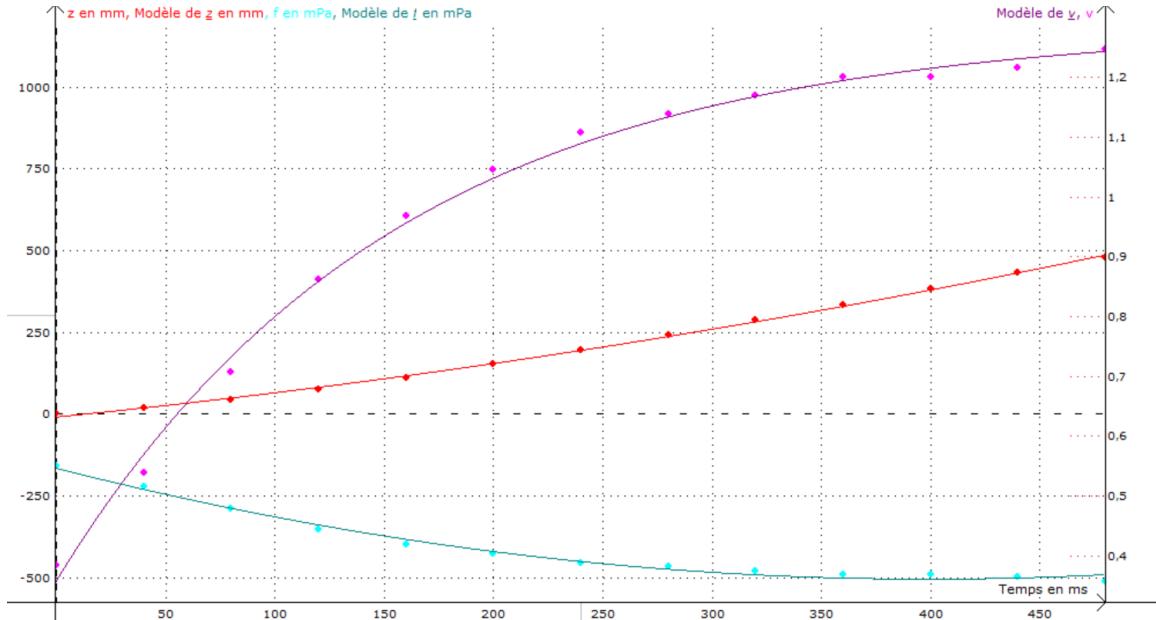


FIGURE 2 – Évolution temporelle du frottement  $f(t)$  (courbe cyan) modélisée dans LatisPro.

## Question 7 : Affinement du modèle (Effets de bords)

### 1. Expression de la nouvelle force de frottement

Dans une éprouvette de rayon  $R$ , la proximité des parois augmente les frottements. La force de Stokes  $\vec{f}$  est modifiée par un facteur correctif dépendant du rapport  $r/R$  :

$$\vec{f} = -\frac{6\pi\eta r}{1 - 2,1\frac{r}{R}} \vec{v}$$

Cette expression remplace la force  $\vec{f} = -6\pi\eta r \vec{v}$  utilisée dans le modèle précédent (modèle infini).

## 2. Nouvelle équation différentielle

En réinjectant cette nouvelle expression de la force dans la deuxième loi de Newton ( $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ) projetée sur l'axe vertical ( $Oz$ ) :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - m_f g - \frac{6\pi\eta r}{1 - 2, 1 \frac{r}{R}} v$$

En divisant par la masse  $m$ , on obtient la forme canonique :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta r}{m(1 - 2, 1 \frac{r}{R})} v = g \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right)$$

## 3. Identification des nouveaux paramètres

Cette équation différentielle est de la même forme mathématique que la précédente :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau'} = \frac{v'_{lim}}{\tau'}$$

Cependant, la constante de temps  $\tau'$  et la vitesse limite  $v'_{lim}$  sont modifiées par le terme correctif  $K = (1 - 2, 1 \frac{r}{R})$ .

D'après l'identification :

- **Nouvelle constante de temps  $\tau'$**  :

$$\frac{1}{\tau'} = \frac{1}{\tau} \times \frac{1}{K} \implies \tau' = \tau \left(1 - 2, 1 \frac{r}{R}\right)$$

- **Nouvelle vitesse limite  $v'_{lim}$**  : Comme pour le premier modèle, la solution particulière (vitesse limite) est atteinte quand  $\frac{dv}{dt} = 0$ .

$$v'_{lim} = g \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right) \tau'$$

En remplaçant  $\tau'$  par son expression :

$$v'_{lim} = \underbrace{g \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right)}_{v_{lim}} \tau \times \left(1 - 2, 1 \frac{r}{R}\right)$$

$$v'_{lim} = v_{lim} \left(1 - 2, 1 \frac{r}{R}\right)$$

## Conclusion sur le modèle

Le terme  $(1 - 2, 1 \frac{r}{R})$  étant inférieur à 1, la vitesse limite théorique calculée avec ce modèle sera "plus faible" que celle du modèle infini. Cela signifie que les parois "freinent" la bille. Comme noté dans l'analyse, ce modèle est plus adapté et plus précis car il prend en compte la géométrie réelle de l'expérience (le rayon de l'éprouvette).

### Question 8 : Modélisation du nouveau système de frottements

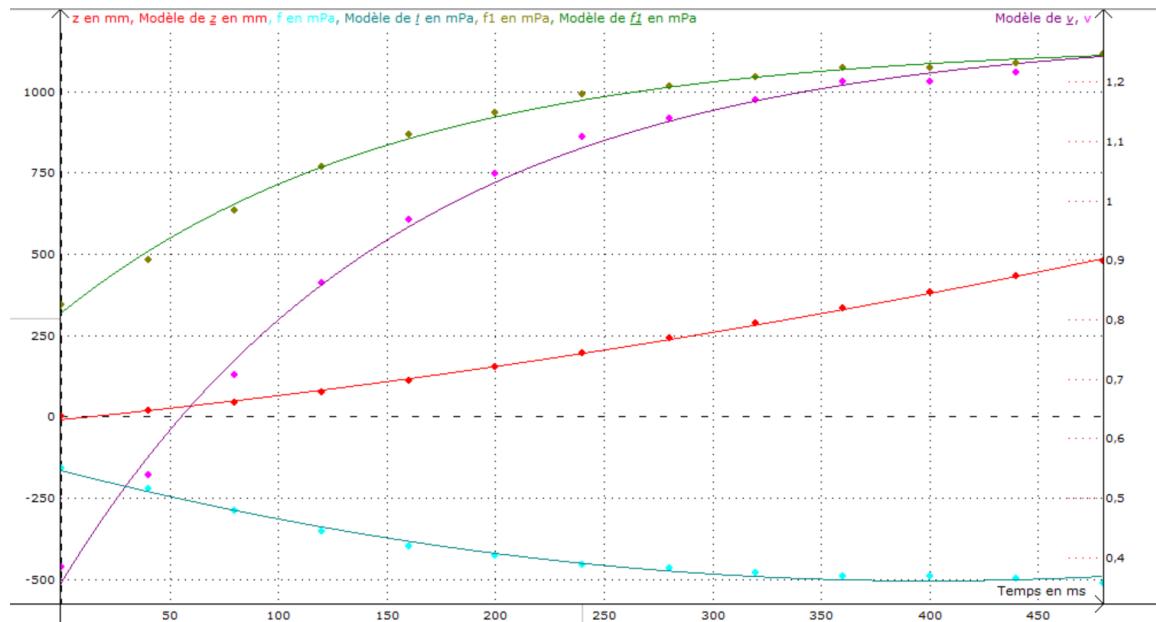


FIGURE 3 – Évolution temporelle du nouveau système de frottement  $f_1(t)$  (courbe verte) modélisée dans LatisPro.

## 10 Conclusion

### Question 9 : Conclusion générale

L'étude a permis de vérifier que les deux modèles fonctionnaient mais que le modèle corrigé était plus adapté car il est plus précis et prend en compte le rayon de l'éprouvette.