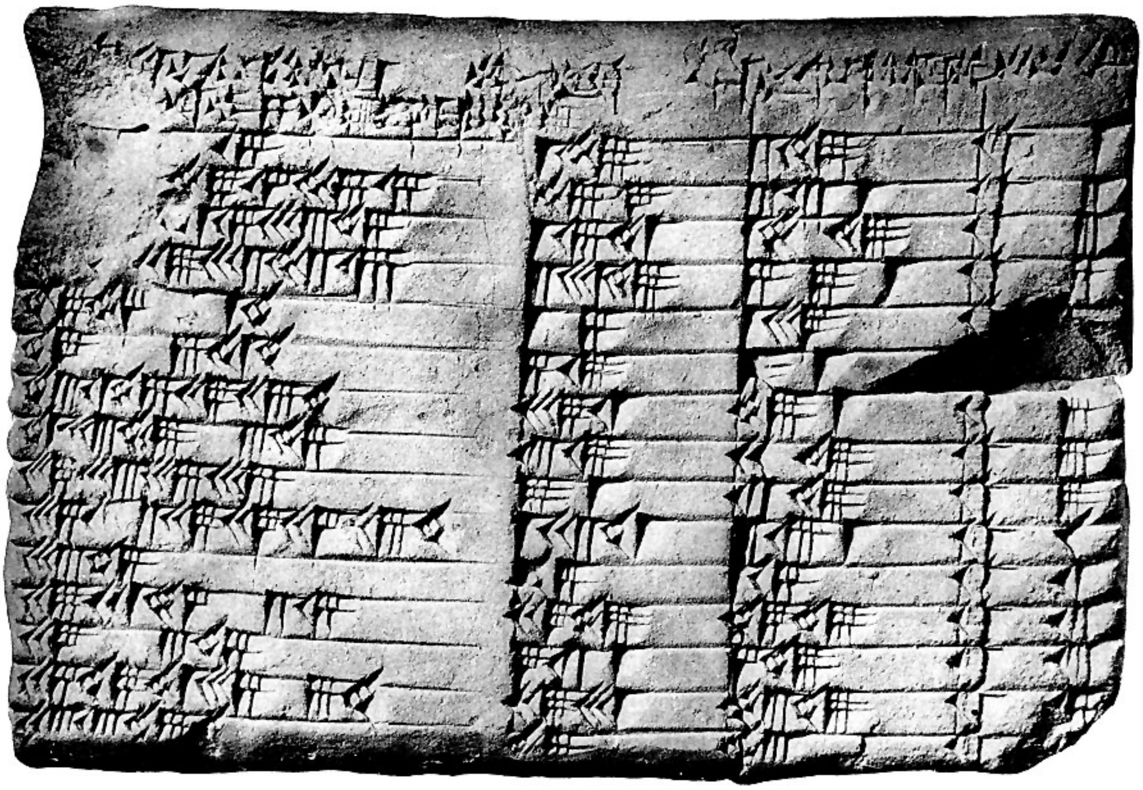
PTSI
2021/2022

Lycée Louis Couffignal

Cahier de calcul

— pratique et entraînement —



Plimpton 322, tablette d'argile babylonienne (1 800 av. JC)

Cette tablette, vieille de près de 4 000 ans, donne une liste de triplets pythagoriciens, c'est-à-dire de triplets (a, b, c) de nombres entiers vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$.

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement.

Coordination

Colas BARDAVID

Équipe des participants

Vincent BAYLE, Romain BASSON, Olivier BERTRAND, Ménard BOURGADE, Julien BUREAUX, Alain CAMANES, Mathieu CHARLOT, Mathilde COLIN DE VERDIÈRE, Keven COMMAULT, Miguel CONCY, Rémy EUPHERTE, Hélène GROS, Audrey HECHNER, Florian HECHNER, Marie HÉZARD, Nicolas LAILLET, Valérie LE BLANC, Thierry LIMOGES, Quang-Thai NGO, Xavier PELLEGRIN, Fabien PELLEGRINI, Jean-Louis POURTIER, Valérie ROBERT, Jean-Pierre TÉCOURT, Guillaume TOMASINI, Marc TENTI

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf SCHMITZER (The Noun Project).

La photographie de la couverture vient de Wikipedia.

Version 3 — 1er septembre 2021

Sommaire

Présentation et mode d'emploi

Qu'est-ce que ce cahier ?

Ce cahier est un cahier de calcul, basé sur le programme de mathématiques collège/lycée ainsi que sur le programme de première année de Post-Bac. Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur de maths mais est un outil pour vous aider à vous améliorer en calcul.

À quoi sert-il ?

En mathématiques, la technique et le calcul sont fondamentaux.

Sans technique, il est impossible de correctement appréhender une question mathématique. De même que l'on doit faire des gammes et beaucoup pratiquer lorsque l'on apprend un instrument, on doit calculer régulièrement lorsque l'on pratique les mathématiques, notamment en CPGE et dans les études Post-Bac.

Comment est-il organisé ?

Ce cahier comporte plusieurs parties :

- Un sommaire vous permettant d'avoir d'un seul coup d'œil les différentes fiches de ce cahier de calcul, et de noter celles que vous avez déjà faites ou pas.
- Une partie de **calculs élémentaires**, faisables dès le début de la première année, et centrée sur les calculs « de base » : développement, factorisation, racines carrées, fractions, *etc.* Cela peut vous paraître simple, mais sachez que ce type d'erreur de calcul est toujours fréquent, même en spé, même sur les copies de concours. Travailler les techniques élémentaires de calcul vous facilitera grandement la vie !
- Une partie liée au programme de première année : sont indiqués précisément les chapitres nécessaires pour pouvoir aborder chaque fiche de calculs.
- Les réponses brutes ainsi que les corrigés détaillés, qui sont à la fin du cahier.

Chaque fiche de calculs est organisée ainsi :

- Une présentation du thème de la fiche et des prérequis (notamment, pour des techniques propres à certaines filières, on précise de quelle filière il s'agit)
- Une liste de calculs, dont le temps de résolution (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par une (), deux (), trois () ou quatre () horloges.
- Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Comment l'utiliser ?

Un travail personnalisé.

Ce cahier de calcul est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez les calculs que vous faites en fonction des difficultés que vous rencontrez et des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur de mathématiques.

Pensez aussi à l'utiliser à l'issue d'un DS ou d'une colle, lorsque vous vous êtes rendu compte que certains points de calcul étaient mal maîtrisés.

Enfin, ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Essayez de pratiquer les calculs à un rythme régulier : **une quinzaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire 10 fiches par jour pendant les vacances » .

Point important : pour réussir à calculer, il faut répéter. C'est pour cela que nous avons mis plusieurs exemples illustrant chaque technique de calcul.

Il peut être utile de parfois refaire certains calculs : n'hésitez pas à cacher les réponses déjà écrites dans les cadres, ou à écrire vos réponses dans les cadres au crayon à papier.

Un travail efficace.

Attention à l'utilisation des réponses et des corrigés : il est important de chercher suffisamment par soi-même avant de regarder les réponses et/ou les corrigés. Il faut vraiment **faire les calculs** afin que le corrigé vous soit profitable.

N'hésitez pas à ne faire qu'en partie une feuille de calculs : il peut être utile de revenir plusieurs fois à une même feuille, afin de voir à quel point telle technique a bien été assimilée.

La progression

Avoir une solide technique de calcul s'acquiert sur le long terme, mais si vous étudiez sérieusement les fiches de ce cahier, vous verrez assez rapidement des progrès apparaître, en colle, en DS, *etc.* Une bonne connaissance du cours combinée à une plus grande aisance en calcul, c'est un très beau tremplin vers la réussite en prépa ou dans vos études !

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse `cahierdecalcul@gmail.com`.

Énoncés

Fractions

Prérequis
Règles de calcul sur les fractions.

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Simplification de fractions.

Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel non nul).

a) $\dfrac{32}{40}$ ....

b) $8^3 \times \dfrac{1}{4^2}$ ....

c) $\dfrac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$ ....

d) $\dfrac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$ ....

Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{3}$ ....

b) $\dfrac{2}{3} - 0{,}2$ ....

c) $\dfrac{36}{25} \times \dfrac{15}{12} \times 5$ ....

d) $-\dfrac{2}{15} \div (-\dfrac{6}{5})$ ....

Calcul 1.3

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7})$ ....

b) $\left(\dfrac{136}{15} - \dfrac{28}{5} + \dfrac{62}{10}\right) \times \dfrac{21}{24}$ ....

c) $\dfrac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$ ....

d) $\dfrac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979}$ ....

Calcul 1.4 — Un petit calcul.

Écrire $\dfrac{0{,}5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \dfrac{0{,}5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0{,}2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3{,}5}$ sous forme d'une fraction irréductible. ....

Calcul 1.5 — Les fractions et le calcul littéral.

Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

a) $\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ ....

b) $\dfrac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \dfrac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$, distincts deux à deux. ....

c) $\dfrac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1,2\}$. ....

Comparaison

Calcul 1.6 — Règles de comparaison.

Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

a) $\dfrac{3}{5} \dots \dfrac{5}{9}$ ....

b) $\dfrac{12}{11} \dots \dfrac{10}{12}$ ......

c) $\dfrac{125}{25} \dots \dfrac{105}{21}$ ....

Réponses mélangées

2^5 $\quad \dfrac{7}{15}$ $\quad \dfrac{3}{5} > \dfrac{5}{9}$ $\quad \dfrac{4}{5}$ $\quad 9$ $\quad \dfrac{16}{35}$ $\quad \dfrac{1}{6}$ $\quad -2 \times 3^{3k-2}$ $\quad \dfrac{12}{11} > \dfrac{10}{12}$ $\quad \dfrac{-1}{n(n+1)^2}$

$\dfrac{125}{25} = \dfrac{105}{21}$ $\quad 247$ $\quad \dfrac{1}{9}$ $\quad \dfrac{203}{24}$ $\quad \dfrac{-10}{3}$ $\quad 1\ 000$ $\quad \dfrac{3}{2}n$ $\quad 3$ $\quad -\dfrac{ab}{a-b}$

► Réponses et corrigés page 33

Fiche de calcul n° 2

002A

Puissances

Prérequis
Opérations sur les puissances (produits, quotients), décompostion en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

Calcul 2.1

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3$ ....

b) $(10^5)^3$ ....

c) $\dfrac{10^5}{10^3}$ ....

d) $\dfrac{10^{-5}}{10^{-3}}$ ....

e) $\dfrac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$ ....

f) $\dfrac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$ ......

Calcul 2.2

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4$ ....

b) $(5^3)^{-2}$ ....

c) $\dfrac{2^5}{2^{-2}}$ ....

d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$ ....

e) $\dfrac{6^5}{2^5}$ ....

f) $\dfrac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$ ....

Calcul 2.3

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$ ....

b) $2^{21} + 2^{22}$ ....

c) $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$ ....

d) $\dfrac{\left(3^2 \cdot (-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5 \cdot 2^3\right)^{-2}}$ ....

Calcul 2.4

Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\dfrac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$ ....

b) $\dfrac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$ ....

c) $\dfrac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$ ....

d) $\dfrac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$ ....

Calcul 2.5

Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x.

a) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1}$ ....

b) $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4}$ ....

c) $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x}$ ....

d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x}$ ....

Réponses mélangées

3^{28} $\quad 11 \quad 10^2 \quad 8 \quad \dfrac{2x}{x+1} \quad 15^4 \quad (-7)^{-2} \quad \dfrac{x}{x+1}$

$2^{38} \cdot 3^{26} \quad 2^7 \quad 2^6 \cdot 5 \quad 2 \quad 2^{-4} \cdot 3^{-1} \quad 10^{-8} \quad 10^{15} \quad 10^4$

$\dfrac{2}{x-2} \quad 3^{10} \quad 5^{-6} \quad 3^5 \quad 2^{21} \cdot 3 \quad 10^{-2} \quad \dfrac{1}{x-2} \quad 10^8$

► Réponses et corrigés page 35

Fiche de calcul n° 3

003A

Calcul littéral

Prérequis
Les identités remarquables !

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 3.1

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x.

a) $\left(2x - \dfrac{1}{2}\right)^3$ ....

b) $(x-1)^3\big(x^2+x+1\big)$ ....

c) $(x+1)^2(x-1)\big(x^2-x+1\big)$ ....

d) $(x+1)^2(x-1)\big(x^2+x+1\big)$ ....

e) $(x-1)^2(x+1)\big(x^2+x+1\big)$ ....

f) $\big(x^2+x+1\big)\big(x^2-x+1\big)$ ....

Calcul 3.2

Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x.

a) $(x-2)^2\big(-x^2+3x-1\big) - (2x-1)(x^3+2)$ ....

b) $(2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1)$ ....

c) $\Big((x+1)^2(x-1)\big(x^2-x+1\big)+1\Big)x - x^6 - x^5 + 2$ ....

d) $(x+1)(x-1)^2 - 2\big(x^2+x+1\big)$ ....

e) $\Big(x^2+\sqrt{2}x+1\Big)\Big(1-\sqrt{2}x+x^2\Big)$ ....

f) $\big(x^2+x+1\big)^2$ ....

Factoriser

Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.

Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

a) $-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49$ ....

b) $25-(10x+3)^2$ ....

c) $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64$ ....

d) $(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64$ ....

Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.

Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de ax^2+bx+c est $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ (où $a\neq 0$).

a) x^2-2x+1 ....

b) x^2+4x+4 ....

c) x^2+3x+2 ....

d) $3x^2+7x+1$ ....

e) $2x^2+3x-28$ ....

f) $-5x^2+6x-1$ ....

Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $(x+y)^2-z^2$ ....

b) $x^2+6xy+9y^2-169x^2$ ....

c) $xy+x+y+1$ ....

d) $xy-x-y+1$ ....

e) $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y$ ..

f) $y^2\left(a^2+b^2\right)+16x^4\left(-a^2-b^2\right)$ ..

Réponses mélangées

$-28+21x$ $\quad$ $3(14x+3y)(-4x+y)$ $\quad$ $(x+1)(y+1)$ $\quad$ $(x+y-z)(x+y+z)$

$-2+12x-17x^2+8x^3-3x^4$ $\quad$ $(x-1)(y-1)$ $\quad$ $1+2x+3x^2+2x^3+x^4$

$(x-1)^2$ $\quad$ $\left(a^2+b^2\right)\left(y-4x^2\right)\left(y+4x^2\right)$ $\quad$ $3\left(x+\dfrac{7-\sqrt{37}}{6}\right)\left(x+\dfrac{7+\sqrt{37}}{6}\right)$

$(x+y)(x+1)^2$ $\quad$ $-5(x-1)\left(x-\dfrac{1}{5}\right)$ $\quad$ $2(3x-4)(10x+3)$ $\quad$ $x^5-x^3-x^2+1$

$(x+2)^2$ $\quad$ $2\left(x+\dfrac{3-\sqrt{233}}{4}\right)\left(x+\dfrac{3+\sqrt{233}}{4}\right)$ $\quad$ $(x+1)(x+2)$

$x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1$ $\quad$ $x^5-x^3+x^2-1$ $\quad$ $1+x^4$ $\quad$ $4(5x+4)(-5x+1)$

$2+x^3-x^4-x^5$ $\quad$ $x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$ $\quad$ $-1-3x-3x^2+x^3$

$-6(6x+7)$ $\quad$ x^4+x^2+1 $\quad$ $8x^3-6x^2+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{8}$ $\quad$ $-8(x+1)(x+16)$

► Réponses et corrigés page 36

Fiche de calcul n° 4

Racines carrées

Prérequis
Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

Premiers calculs

Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.

Exprimer sans racine carrée les expressions suivantes.

a) $\sqrt{(-5)^2}$ ....

b) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$ ....

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ ....

d) $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$ ....

e) $\sqrt{(3-\pi)^2}$ ....

f) $\sqrt{(3-a)^2}$ ....

Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.

Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{5})^2$ ....

b) $(2+\sqrt{5})^2$ ....

c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ ....

d) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ ....

e) $(3+\sqrt{7})^2-(3-\sqrt{7})^2$ ....

f) $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$ ....

g) $\left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$ ....

h) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ .....

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calcul 4.3

Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.

a) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$ ....

b) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ ....

c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ....

d) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ ....

Réponses mélangées

12 $\quad \sqrt{3}-1$ $\quad |3-a|$ $\quad 2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$ $\quad 20$ $\quad -\sqrt{3}+2$

$9-\dfrac{10}{3}\sqrt{2}$ $\quad 1+\sqrt{3}$ $\quad -\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$ $\quad 10$ $\quad -(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$3+\sqrt{2}$ $\quad \sqrt{7}-2$ $\quad 3-2\sqrt{2}$ $\quad 12\sqrt{7}$ $\quad 9+4\sqrt{5}$ $\quad \pi-3$ $\quad 5$

► Réponses et corrigés page 38

Fiche de calcul n° 5 **005A**

Expressions algébriques

Prérequis
Identités remarquables.

Équations polynomiales

Calcul 5.1 — Cubique.

Soit a un nombre réel tel que $a^3 - a^2 + 1 = 0$.
Exprimer les quantités suivantes sous la forme $xa^2 + ya + z$ où x, y, z sont trois nombres rationnels.

a) $(a+2)^3$ ....

b) $a^5 - a^6$ ....

c) a^{12} ....

d) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2}$ ....

Calcul 5.2 — Introduction aux nombres complexes.

Soit i un nombre tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
Exprimer les quantités suivantes sous la forme $x + \mathrm{i}y$ où x, y sont deux réels.

a) $(3+\mathrm{i})^2$ ....

b) $(3-\mathrm{i})^2$ ....

c) $(3-\mathrm{i})^3$ ....

d) $(3-2\mathrm{i})^3$ ....

Calcul 5.3

Même exercice.

a) $(4-5\mathrm{i})(6+3\mathrm{i})$ ....

b) $(2+3\mathrm{i})^3(2-3\mathrm{i})^3$ ....

c) $\left(-4+\mathrm{i}\sqrt{5}\right)^3$ ....

d) $\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ ....

Réponses mélangées

1 $\quad -9-46\mathrm{i}$ $\quad 8+6\mathrm{i}$ $\quad 4a^2-a-3$ $\quad 2197$ $\quad a^2-a-1$ $\quad -a^2+1$

$8-6\mathrm{i}$ $\quad -4+43\mathrm{i}\sqrt{5}$ $\quad 7a^2+12a+7$ $\quad 39-18\mathrm{i}$ $\quad 18-26\mathrm{i}$

► Réponses et corrigés page 39

Équations du second degré

Prérequis
Relations entre coefficients et racines.

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices ! Il est toutefois utile de savoir exprimer la somme et le produit des racines à l'aide des coefficients : la somme vaut $-\frac{b}{a}$ et le produit $\frac{c}{a}$.

Recherche de racines

Calcul 6.1 — Des racines vraiment évidentes.

Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi* $0, 1, -1, 2, -2$ *ainsi éventuellement que* 3 *et* -3.

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ ....

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ ....

c) $x^2 + 4x - 12 = 0$ ....

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$ ....

e) $x^2 - 5x = 0$ ....

f) $2x^2 + 3x = 0$ ....

g) $2x^2 + 3 = 0$ ....

h) $x^2 + 4x - 5 = 0$ ....

i) $3x^2 - 11x + 8 = 0$ ....

j) $5x^2 + 24x + 19 = 0$ ....

Calcul 6.2 — Somme et produit.

Résoudre mentalement les équations suivantes.

a) $x^2 - 13x + 42 = 0$ ....

b) $x^2 + 8x + 15 = 0$ ....

c) $x^2 + 18x + 77 = 0$ ....

d) $x^2 - 8x - 33 = 0$ ....

e) $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ ....

f) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ ....

Calcul 6.3 — L'une grâce à l'autre.

Calculer la seconde racine des équations suivantes.

a) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine ....

b) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ est racine ....

c) $mx^2 + (2m+1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine ....

d) $(m+3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine ....

Recherche d'équations

Calcul 6.4 — **Avec le discriminant.**

Déterminer la valeur à donner à m pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

a) $x^2 - (2m+3)x + m^2 = 0$ ....

b) $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 = 0$ ....

c) $(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + (m+3) = 0$ ....

Factorisations et signe

Calcul 6.5 — **Factorisation à vue.**

Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x.

a) $2x^2 + 7x + 6 = (x+2)(ax+b)$ ....

b) $-4x^2 + 4x - 1 = (2x-1)(ax+b)$ ....

c) $-3x^2 + 14x - 15 = (x-3)(ax+b)$ ....

d) $\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{11}{2}x - 40 = (x-5)(ax+b)$ ....

e) $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x-\sqrt{7})(ax+b)$ ....

Calcul 6.6 — **Signe d'un trinôme.**

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

a) $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$ ....

b) $-x^2 + 2x + 15$ ....

c) $(x+1)(3x-2)$ ....

d) $\dfrac{x-4}{2x+1}$ ....

Réponses mélangées

$2,3$ $6,7$ 0, donc $-3/2$ $a=-3$ et $b=5$ $m=-1$ et $x=-2$, ou $m=7$ et $x=2/3$

0, donc 5 $2m/(m+3)$ $-1/3,-1/3$ 1 donc -5 1 donc $8/3$ $]-\infty,-1/2[\cup[4,+\infty[$

$-1/m$ $]-\infty,-1]\cup[2/3,+\infty[$ $a-b,a+b$ $-2/7$ $a=2$ et $b=3$

$[-3,5]$ $]-\infty,1]\cup[\sqrt{2},+\infty[$ $\varnothing$ a,b $2/3$ $3,3$ $a=1$ et $b=3\sqrt{7}$

$-3,-5$ $a=-2$ et $b=1$ -1 donc $-19/5$ $m=1$ et $x=-1$ ou $m=-1$ et $x=1$

$-7,-11$ $2,-6$ $m=-3/4$ et $x=3/4$ $-3,11$ $a=1/2$ et $b=8$

▶ Réponses et corrigés page 40

Systèmes linéaires

Prérequis
Résolution par substitution d'une variable, par combinaisons linéaires de lignes.

Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Calcul 7.1

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$.

a) $\begin{cases} x - 2\,y = 1 \\ 3\,x + 4\,y = 13 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} 2\,x + y = 16 \\ x - y = 5 \end{cases}$ ....

Calcul 7.2 — Systèmes avec paramètre.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ en fonction des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = a \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} x + 2y = 3a \\ 2x + 3y = 5a - a^2 \end{cases}$ ......

Systèmes de 2 équations à 3 inconnues

Calcul 7.3

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$ ....

Systèmes de 3 équations à 3 inconnues

Calcul 7.4

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + 10y + z = 0 \end{cases}$ ......

c) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 4x + 5y + 4z = 1 \end{cases}$ ......

Réponses mélangées

$\left\{(1 - \frac{a}{4}, \frac{-1}{2} + \frac{3}{8}a)\right\}$ $\quad\varnothing\quad$ $(a - 2a^2, a + a^2)$ $\quad$ $\{(1+z, -z, z)\,;\, z \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $\{(2, -1, 3)\}$

$\{(1, y, 3 + 2y)\,;\, y \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $\{(7, 2)\}$ $\quad$ $\left\{(-\frac{2}{7} - z, \frac{-3}{7}, z)\,;\, z \in \mathbb{R}\right\}$ $\quad$ $\{(3, 1)\}$

▶ Réponses et corrigés page 42

Coefficients binomiaux

Prérequis
Factorielle. Coefficients binomiaux.

La lettre n désigne un entier naturel non nul. On rappelle que $n! = 1\times2\times3\times\cdots\times n$ et que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\times(n-k)!}$.

Manipulations de factorielles et de coefficients binomiaux

Calcul 8.1 — Pour s'échauffer.

Donner la valeur des expressions suivantes :

a) $\dfrac{101!}{99!}$ ....

b) $\dfrac{10!}{7!}$ ....

c) $\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}$ ....

d) $\binom{6}{2}$ ....

e) $\binom{8}{3}$ ....

f) $4\times\binom{7}{4}$ ....

Calcul 8.2 — Pour s'échauffer – *bis*.

Écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles, de coefficients binomiaux et, le cas échéant, à l'aide de puissances.

a) $6\times7\times8\times9$ ....

b) $\dfrac{6\times7\times8\times9}{2\times3\times4}$ ....

c) $2\times4\times\cdots\times(2n)$ ....

d) $3\times5\times\cdots\times(2n+1)$ ...

Calcul 8.3 — Avec des paramètres.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre k désigne un entier naturel tel que $k<n$.

a) $\binom{n}{2}$ (pour $n\geqslant 2$) ....

b) $\binom{n}{3}$ (pour $n\geqslant 3$) ....

c) $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$ ....

d) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$ ....

e) $\dfrac{1}{n!}-\dfrac{n}{(n+1)!}$ ....

f) $\dfrac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}}-\dfrac{n!}{2^{2n}}$ ....

Calcul 8.4 — Avec des paramètres – *bis*.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre a désigne un nombre non nul.

a) $\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{2n\times(n+1)!}+\dfrac{1}{2\times(n+2)!}$ ....

b) $\dfrac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)}\times((n+1)!)^3}\div\dfrac{(3n)!}{a^{3n}\times(n!)^3}$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ $\quad 720 \quad 140 \quad$ $\dfrac{1}{(n+1)!}$ $\quad \dfrac{9!}{5!} \quad \dfrac{1}{30} \quad \dfrac{k+1}{n-k}$

$2^n \times n!$ $\quad \dfrac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2} \quad (n+2)(n+1) \quad \dfrac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}$

$\dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!} \quad 15 \quad \dfrac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}} \quad \dfrac{n(n-1)}{2} \quad \dbinom{9}{4} \quad 56 \quad 10\,100$

► Réponses et corrigés page 44

Fiche de calcul n° 9

006A

Exponentielle et logarithme

Prérequis
Exponentielle, logarithme.

Logarithmes

Calcul 9.1

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln 16$ ....

b) $\ln 512$ ....

c) $\ln 0,125$ ....

d) $\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1}{8}$ ....

e) $\ln 72 - 2\ln 3$ ....

f) $\ln 36$ ....

Calcul 9.2

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

$\ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \cdots + \ln\dfrac{98}{99} + \ln\dfrac{99}{100}$ ....

Exponentielles

Calcul 9.3

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $\mathrm{e}^{3\ln 2}$ ....

b) $\ln(\sqrt{e})$ ....

c) $\ln(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}})$ ....

d) $\mathrm{e}^{-2\ln 3}$ ....

e) $\ln(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})$ ....

f) $\mathrm{e}^{\ln 3 - \ln 2}$ ....

g) $\ln(\sqrt{\mathrm{e}^4}) - \ln(\sqrt{\mathrm{e}^2})$ ....

h) $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln \mathrm{e}^2)}\right)$ ....

Équations, inéquations

Calcul 9.4

Résoudre les équations et inéquations suivantes (d'inconnue x).

a) $\mathrm{e}^{3x-5} \geqslant 12$ ....

b) $1 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2+x}$ ....

c) $\mathrm{e}^{1+\ln x} \geqslant 2$ ....

d) $\mathrm{e}^{-6x} \leqslant \sqrt{\mathrm{e}}$ ....

e) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$ ....

f) $\ln(-x-5) = \ln \dfrac{x-61}{x+7}$ ....

Réponses mélangées

-1 $\quad x \geqslant \dfrac{\ln 12 + 5}{3}$ $\quad 3\ln 2$ $\quad -3\ln 2$ $\quad 9\ln 2$ $\quad 2\ln 2 + 2\ln 3$

$\dfrac{1}{2}$ $\quad \dfrac{-13-\sqrt{273}}{2}$ $\quad \varnothing$ $\quad -\dfrac{1}{2}$ $\quad x \geqslant -\dfrac{1}{12}$ $\quad -2\ln 2 - 2\ln 5$

$x \in [0,1]$ $\quad x \geqslant \dfrac{2}{e}$ $\quad \dfrac{1}{9}$ $\quad 1$ $\quad 4\ln 2$ $\quad \dfrac{1}{2}\ln 2$ $\quad \dfrac{3}{2}$ $\quad \dfrac{1}{3}$ $\quad 8$

► Réponses et corrigés page 46

Fiche de calcul n° 10

Trigonométrie

Prérequis
Relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Symétrie et périodicité de sin et cos.
Formules d'addition et de duplication.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Valeurs remarquables de cosinus et sinus

Calcul 10.1

Simplifier :

a) $\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4}$.

b) $\sin\frac{5\pi}{6} + \sin\frac{7\pi}{6}$ ....

c) $\cos^2\frac{4\pi}{3} - \sin^2\frac{4\pi}{3}$ ....

Propriétés remarquables de cosinus et sinus

Calcul 10.2

Simplifier :

a) $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ ....

b) $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ ....

d) $\cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$ ....

Formules d'addition

Calcul 10.3

Calculer les quantités suivantes.

a) $\cos\frac{5\pi}{12}$ (on a $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$) ....

b) $\cos\frac{\pi}{12}$ ....

c) $\sin\frac{\pi}{12}$ ....

Calcul 10.4

a) Simplifier : $\sin(4x)\cos(5x) - \sin(5x)\cos(4x)$ ....

b) Simplifier : $\dfrac{\sin 2x}{\sin x} - \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$ (pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$) ....

c) Simplifier : $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$ ....

d) Expliciter $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$ ....

Formules de duplication

Calcul 10.5

En remarquant qu'on a $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, calculer :

a) $\cos \frac{\pi}{8}$ ....

b) $\sin \frac{\pi}{8}$ ....

Équations trigonométriques

Calcul 10.6

Résoudre dans $[0, 2\pi]$, dans $[-\pi, \pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ ....

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ....

c) $\sin x = \cos \frac{2\pi}{3}$ ......

d) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ ....

e) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ......

f) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

g) $\cos x = \cos \frac{\pi}{7}$ ....

h) $\sin x = \cos \frac{\pi}{7}$ ....

Inéquations trigonométriques

Calcul 10.7

Résoudre dans $[0, 2\pi]$, puis dans $[-\pi, \pi]$, les inéquations suivantes :

a) $\cos x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ....

b) $\cos x \leqslant \cos \frac{\pi}{3}$ ....

c) $\sin x \leqslant \frac{1}{2}$ ....

d) $|\sin x| \leqslant \frac{1}{2}$ ....

e) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$ ......

f) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$ .....

Réponses mélangées

$\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad 0 \quad$ $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\quad$ $\left\{\frac{\pi}{7}, \frac{13\pi}{7}\right\}$

$\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ $\quad$ $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ $\quad$ $-\frac{1}{2}$ $\quad$ $\left\{\frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14}\right\}$ $\quad$ $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\quad$ $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ $\quad$ $\left\{\frac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{11\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad$ $-2\cos x$

0 $\quad$ $\left\{\frac{\pi}{7}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{7}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad$ $\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{11\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad$ $\left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$ $\quad$ $\left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$

$\left\{\frac{5\pi}{14}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{9\pi}{14}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad$ $\left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ $\quad$ $\left\{-\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}\right\}$ $\quad$ $\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right\}$

$\left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$ $\quad$ $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ $\quad$ $\left\{\frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}\right\}$ $\quad$ $-\sin x$ $\quad$ $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$

$\left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ $\quad$ $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$ $\quad$ $\left\{\frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14}\right\}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ $\quad$ $\left\{-\frac{11\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right\}$ $\quad$ $\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ $\quad$ $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$

$\left[0, \frac{3\pi}{8}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}\right]\cup\left[\frac{15\pi}{8}, 2\pi\right]$ $\quad$ $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ $\quad$ $\left\{\frac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ $\quad$ $4\cos^3 x - 3\cos x$ $\quad$ $-\sin x$ $\quad$ $\left[-\pi, -\frac{5\pi}{8}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{8}, \pi\right]$

$\left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$ $\quad$ $\left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}$ $\quad 0 \quad$ $\frac{1}{\cos x}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\quad$ $2\cos x$ $\quad 0 \quad$ $\left\{\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

► Réponses et corrigés page 47

Dérivation

Prérequis
Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Application des formules usuelles

Calcul 11.1 — Avec des produits.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6)\exp(2x)$. ....

d) $x \in \,]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x)\ln(x - 2)$ ....

Calcul 11.2 — Avec des puissances.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2\cos(x))^2$. ....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3\cos(x) - \sin(x))^3$. ....

Calcul 11.3 — Avec des fonctions composées.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. ....

b) $x \in \,]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x)\exp(x^2 + x)$. ....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3\sin(2x))$. ....

Calcul 11.4 — Avec des fonctions composées — *bis*.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos\left(\dfrac{2x+1}{x^2+4}\right)$. ....

c) $x \in]0,\pi[$ et $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$. ....

d) $x \in]0,+\infty[$ et $f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$. ....

Calcul 11.5 — Avec des quotients.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{2\sin(x)+3}$. ....

b) $x \in]0,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3x+2}$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{\cos(2x+1)}{x^2+1}$. ....

d) $x \in]1,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{2x^2+3x}{\ln(x)}$. ....

Dériver pour étudier une fonction

Calcul 11.6

Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

a) $x \in \mathbb{R} \setminus 3,-2$ et $f(x) = \dfrac{1}{3-x} + \dfrac{1}{2+x}$. ....

b) $x \in]-1,+\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$ ....

c) $x \in]1,+\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2+x-2) - \dfrac{x+2}{x-1}$. ....

d) $x \in]-1,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$. ....

e) $x \in]0,e[\cup]e,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}$. ....

Réponses mélangées

$\dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$ $\qquad$ $\dfrac{x^2}{(x+1)^2}$ $\qquad$ $\dfrac{6x}{(x^2+1)^2}\cos\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)$ $\qquad$ $(2x^2-2x+10)\exp(2x)$

$\dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$ $\qquad$ $\dfrac{2}{x+1}\left(x+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ $\qquad$ $(6x-1)\ln(x-2)+\dfrac{3x^2-x}{x-2}$

$5x^4-6x^2+4x-15$ $\qquad$ $-3(3\cos(x)-\sin(x))^2(3\sin(x)+\cos(x))$ $\qquad$ $4(2x^3+4x-1)(3x^2+2)$

$(-2x^2+3x+1)\exp(x^2+x)$ $\qquad$ $\dfrac{1}{x\ln(x)}$ $\qquad$ $\dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ $\qquad$ $\dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3)-(x^2+3x)\times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$

$6x^2+2x-11$ $\qquad$ $6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$ $\qquad$ $\dfrac{2x}{x^2+1}$ $\qquad$ $\dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}$

$\dfrac{2x^2+2x-8}{(x^2+4)^2}\sin\left(\dfrac{2x+1}{x^2+4}\right)$ $\qquad$ $\dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}$ $\qquad$ $\dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$ $\qquad$ $5(x^2-5x)^4(2x-5)$

$-2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1)+x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}$ $\qquad$ $\dfrac{(4x+3)\ln(x)-2x-3}{(\ln(x))^2}$ $\qquad$ $8\cos^2(x)-6\cos(x)\sin(x)-4$

► Réponses et corrigés page 50

Primitives

Prérequis

Intégration de Terminale. Dérivée d'une fonction composée.
Trigonométrie directe.

Pour chaque fonction à intégrer on pourra commencer par chercher les domaines où elle admet des primitives.

Calculs directs

Calcul 12.1

Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a) $\dfrac{1}{t+1}$ ....

b) $\dfrac{3}{(t+2)^2}$ ....

c) $\dfrac{3}{(t+2)^3}$ ....

d) $\sin(4t)$ ....

e) $\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}$ ....

f) e^{2t+1} ....

Utilisation des formulaires

Calcul 12.2 — Dérivée d'une fonction composée.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\dfrac{2t^2}{1+t^3}$ ....

b) $t\sqrt{1+2t^2}$ ....

c) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ....

d) $\dfrac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}$ ....

e) $\dfrac{t}{1+3t^2}$ ....

f) $\dfrac{12t}{(1+3t^2)^3}$ ....

g) $\dfrac{\ln^3 t}{t}$ ....

h) $\dfrac{8\mathrm{e}^{2t}}{(3-\mathrm{e}^{2t})^3}$ ....

i) $\dfrac{1}{t^2\sqrt{t}}$ ....

j) $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^2}$ ....

Calcul 12.3 — Fractions rationnelles.

Déterminer une primitive des expressions suivantes après quelques manipulations algébriques simples.

a) $\dfrac{t^2+t+1}{t^2}$ ....

b) $\dfrac{t^2+1}{t^3}$ ....

Réponses mélangées

$-\dfrac{1}{(1+3t^2)^2}$ $\quad -\dfrac{3}{t+2}$ $\quad \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t+1}$ $\quad -\dfrac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}$ $\quad \dfrac{2}{3}\ln|1+t^3|$ $\quad -\dfrac{3}{2(t+2)^2}$

$\dfrac{1}{4}\ln^4 t$ $\quad -\sqrt{1-t^2}$ $\quad \ln t - \dfrac{1}{2t^2}$ $\quad \dfrac{2}{(3-\mathrm{e}^{2t})^2}$ $\quad t+\ln t - \dfrac{1}{t}$ $\quad \dfrac{3}{4}(1+7t^2)^{\frac{2}{3}}$

$-\dfrac{\cos(4t)}{4}$ $\quad -\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$ $\quad \dfrac{1}{6}\ln(1+3t^2)$ $\quad \dfrac{1}{6}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}$ $\quad \dfrac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}$ $\quad \ln|t+1|$

► Réponses et corrigés page 53

Calcul d'intégrales

Prérequis
Primitives usuelles, composées simples.

Intégrales et aires algébriques

On rappelle que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont « dans le bon ordre ».

Calcul 13.1

Sans chercher à calculer les intégrales suivantes, donner leur signe.

a) $\int_{-2}^{3} x^2 + \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ . . . . □

b) $\int_{5}^{-3} |\sin 7x|\,\mathrm{d}x$ □

c) $\int_{0}^{-1} \sin x\,\mathrm{d}x$ . . . □

Calcul 13.2

En se ramenant à des aires, calculer de tête les intégrales suivantes.

a) $\int_{1}^{3} 7\,\mathrm{d}x$ . . . . □

b) $\int_{7}^{-3} -5\,\mathrm{d}x$ . . . . . □

c) $\int_{0}^{7} 3x\,\mathrm{d}x$ . . . . . . □

d) $\int_{2}^{8} 1 - 2x\,\mathrm{d}x$ . . □

e) $\int_{-2}^{2} \sin x\,\mathrm{d}x$ . . . . □

f) $\int_{-2}^{1} |x|\,\mathrm{d}x$ . . . . . . □

Calcul d'intégrales

On rappelle que si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, que l'on note $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

Calcul 13.3 — Polynômes.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^{3} 2\,\mathrm{d}x$ . . . . □

b) $\int_{1}^{3} 2x - 5\,\mathrm{d}x$ . . . . □

c) $\int_{-2}^{0} x^2 + x + 1\,\mathrm{d}x$ . . . . □

d) $\int_{-1}^{1} 3x^5 - 5x^3\,\mathrm{d}x$ . . . . □

e) $\int_{0}^{1} x^5 - x^4\,\mathrm{d}x$ . . . . □

f) $\int_{1}^{-1} x^{100}\,\mathrm{d}x$ . . . . □

Calcul 13.4 — Fonctions usuelles.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x\,\mathrm{d}x$ . . . □

b) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,\mathrm{d}x$ . . . □

c) $\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ . . . . □

d) $\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ . . . □

e) $\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ . . . . . . □

f) $\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ . . . . □

Calcul 13.5 — De la forme $f(ax+b)$.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2x+1)^3 \, \mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-2}^{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1} \, \mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\pi x + 2}$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) \, \mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \, \mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\Big(\frac{\pi}{3} - x\Big) \, \mathrm{d}x$ ....

Réponses mélangées

Positif Positif 1 -2 0 Négatif $\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3}$ 50 $\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{8}{3}$ 0 -54 0 8 $2(\mathrm{e}^3-1)$ 18 $-\ln 3$ $-\dfrac{2}{101}$

$\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $-\dfrac{1}{30}$ 78 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ 6 $\dfrac{147}{2}$ $\dfrac{1}{\pi}\ln\Big(1+\dfrac{\pi}{2}\Big)$ $\dfrac{5}{2}$ 14

► Réponses et corrigés page 54

Équations différentielles

Prérequis

Équations différentielles.

Équations d'ordre 1 à coefficients constants

Calcul 14.1

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y' = 12y$ et $y(0) = 56$ ....

b) $y' = y + 1$ et $y(0) = 5$ ....

c) $y' = 3y + 5$ et $y(0) = 1$ ....

d) $y' = 2y + 12$ et $y(0) = 3$ ....

Calcul 14.2

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $5y' = -y$ et $y(1) = \mathrm{e}$ ....

b) $7y' + 2y = 2$ et $y(7) = -1$ ....

c) $y' - \sqrt{5}y = 6$ et $y(0) = \pi$ ....

d) $y' = \pi y + 2\mathrm{e}$ et $y(\pi) = 12$ ....

Réponses mélangées

$x \mapsto 9\mathrm{e}^{2x} - 6$ $\qquad x \mapsto 6\mathrm{e}^{x} - 1$ $\qquad x \mapsto \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$ $\qquad x \mapsto \dfrac{8\mathrm{e}^{3x} - 5}{3}$

$x \mapsto 1 - 2\mathrm{e}^{-2x/7+2}$ $\qquad x \mapsto 56\mathrm{e}^{12x}$ $\qquad x \mapsto \left(12 + \dfrac{2\mathrm{e}}{\pi}\right)\mathrm{e}^{\pi x - \pi^2} - \dfrac{2\mathrm{e}}{\pi}$ $\qquad x \mapsto \mathrm{e}^{(6-x)/5}$

► Réponses et corrigés page 56

Suites numériques

Prérequis

Suites récurrentes. Suites arithmétiques. Suites géométriques.

Calcul de termes

Calcul 15.1 — Suite explicite.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2n+3}{5} \times 2^{n+2}$. Calculer :

a) u_0 ....

b) u_1 ....

c) u_{n+1} ....

d) u_{3n} ....

Calcul 15.2 — Suite récurrente.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3$. Calculer :

a) son troisième terme ....

b) u_3 ....

Calcul 15.3 — Suite récurrente.

On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par $v_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \geqslant 1,\ v_{n+1} = \sqrt{v_n}$. Calculer :

a) v_3 ....

b) son sixième terme ....

Calcul 15.4 — Suite récurrente.

On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $w_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n^2$. Calculer :

a) w_2 ....

b) son centième terme ....

Calcul 15.5 — Suite explicite.

Soit la suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \ln\left(\dfrac{n^n}{2^n}\right)$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

a) t_{2n} ....

b) t_{4n} ....

Suites arithmétiques et géométriques

Calcul 15.6 — Suite arithmétique.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2. Calculer :

a) a_{10} ....

b) $s_{100} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{99}$ ....

c) $a_{1\ 000}$ ....

d) $s_{101} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{100}$ ....

Calcul 15.7 — **Suite arithmétique.**

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r vérifiant que $b_{101} = \dfrac{2}{3}$ et $b_{103} = \dfrac{3}{4}$. Calculer :

a) b_{102} ....

b) r ....

Calcul 15.8 — **Suite géométrique.**

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $g_0 = 3$ et de raison $\dfrac{1}{2}$. Calculer :

a) Son dixième terme est : ....

b) $\sigma_{10} = g_0 + g_1 + \ldots + g_9$ ....

c) g_{10} ....

d) $\sigma_{11} = g_0 + g_1 + \ldots + g_{10}$ ....

Calcul 15.9 — **Suite géométrique.**

La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q vérifiant que $h_{11} = \dfrac{5\pi}{11}$ et $h_{13} = \dfrac{11\pi}{25}$. Calculer :

a) h_{12} ....

b) q ....

Suites récurrentes sur deux rangs

Calcul 15.10

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par que $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$. Calculer :

a) u_2 ....

b) u_5 ....

Réponses mélangées

8 $\quad 211 \quad 29 \quad \dfrac{3}{1\,024} \quad \dfrac{12}{5} \quad \dfrac{3}{512} \quad 13 \quad \dfrac{1}{24} \quad 21 \quad 2^{\frac{1}{64}} \quad \dfrac{11\sqrt{5}}{25}$

$13 \quad \dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5} \quad 2n\ln(n) \quad 2 \quad \dfrac{6141}{1024} \quad 2\,001 \quad 2 \quad \dfrac{3069}{512}$

$\dfrac{\pi\sqrt{5}}{5} \quad \dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5} \quad 2^{\frac{1}{8}} \quad \dfrac{17}{24} \quad 10\,201 \quad 4n\ln(2n) \quad 10\,000$

► Réponses et corrigés page 58

Réponses et corrigés

Fiche n° 1. Fractions

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{\frac{4}{5}}$

1.1 b) .... $\boxed{2^5}$

1.1 c) .... $\boxed{3}$

1.1 d) .... $\boxed{-2\times 3^{3k-2}}$

1.2 a) .... $\boxed{\frac{1}{6}}$

1.2 b) .... $\boxed{\frac{7}{15}}$

1.2 c) .... $\boxed{9}$

1.2 d) .... $\boxed{\frac{1}{9}}$

1.3 a) .... $\boxed{247}$

1.3 b) .... $\boxed{\frac{203}{24}}$

1.3 c) .... $\boxed{\frac{-10}{3}}$

1.3 d) .... $\boxed{1\ 000}$

1.4 .... $\boxed{\frac{16}{35}}$

1.5 a) .... $\boxed{\frac{-1}{n(n+1)^2}}$

1.5 b) .... $\boxed{-\frac{ab}{a-b}}$

1.5 c) .... $\boxed{\frac{3}{2}n}$

1.6 a) .... $\boxed{\frac{3}{5}>\frac{5}{9}}$

1.6 b) .... $\boxed{\frac{12}{11}>\frac{10}{12}}$

1.6 c) .... $\boxed{\frac{125}{25}=\frac{105}{21}}$

Corrigés

1.1 a) $\frac{32}{40}=\frac{8\times 4}{8\times 5}=\frac{4}{5}$

1.1 b) $8^3\times\frac{1}{4^2}=(2\times 4)^3\times\frac{1}{4^2}=2^3\times 4^3\times\frac{1}{4^2}=2^3\times 4=2^5$

1.1 c) $\frac{27^{-1}\times 4^2}{3^{-4}\times 2^4}=\frac{(3^3)^{-1}\times(2^2)^2}{3^{-4}\times 2^4}=\frac{3^4}{3^3}=3$

1.1 d) On a : $\frac{(-2)^{2k+1}\times 3^{2k-1}}{4^k\times 3^{-k+1}}=\frac{(-2)\times(-2)^{2k}\times 3^{2k}\times 3^{-1}}{4^k\times 3^{-k}\times 3}=\frac{(-2)\times 4^k\times 3^{2k}\times 3^k}{4^k\times 3^2}=-2\times 3^{3k-2}$.

1.2 a) On met au même dénominateur : $\frac{2}{4}-\frac{1}{3}=\frac{2\times 3}{4\times 3}-\frac{1\times 4}{3\times 4}=\frac{6}{12}-\frac{4}{12}=\frac{6-4}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

1.2 b) On transforme 0,2 en fraction et on met au même dénominateur :

$$\frac{2}{3}-0{,}2=\frac{2}{3}-\frac{2}{10}=\frac{2\times 10}{3\times 10}-\frac{2\times 3}{10\times 3}=\frac{20}{30}-\frac{6}{30}=\frac{20-6}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7\times 2}{15\times 2}=\frac{7}{15}.$$

1.2 c) Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{36}{25}\times\frac{15}{12}\times 5=\frac{36}{25}\times\frac{15}{12}\times\frac{5}{1}=\frac{36\times 15\times 5}{25\times 12\times 1}=\frac{12\times 3\times 5\times 3\times 5}{5\times 5\times 12\times 1}=\frac{3\times 3}{1}=\frac{9}{1}=9.$$

1.2 d) Pour diviser une fraction par une autre, on la multiplie par la fraction inverse de la deuxième fraction :

$$-\frac{2}{15}\div(-\frac{6}{5})=-\frac{2}{15}\times(-\frac{5}{6})=\frac{2}{15}\times\frac{5}{6}=\frac{2\times 5}{15\times 6}=\frac{2\times 5}{3\times 5\times 2\times 3}=\frac{1}{9}.$$

1.3 a) On développe :

$$(2\times 3\times 5\times 7)(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7})=\frac{2\times 3\times 5\times 7}{2}+\frac{2\times 3\times 5\times 7}{3}+\frac{2\times 3\times 5\times 7}{5}+\frac{2\times 3\times 5\times 7}{7}$$
$$=3\times 5\times 7+2\times 5\times 7+2\times 3\times 7+2\times 3\times 5=105+70+42+30=247.$$

1.3 b) On simplifie d'abord, puis on applique les règles de calcul :

$$\left(\frac{136}{15}-\frac{28}{5}+\frac{62}{10}\right)\times\frac{21}{24}=\left(\frac{136}{15}-\frac{28}{5}+\frac{31}{5}\right)\times\frac{7}{8}$$
$$=\left(\frac{136}{15}+\frac{3}{5}\right)\times\frac{7}{8}=\left(\frac{136}{15}+\frac{9}{15}\right)\times\frac{7}{8}=\frac{145}{15}\times\frac{7}{8}=\frac{29}{3}\times\frac{7}{8}=\frac{203}{24}.$$

1.3 c) On simplifie d'abord les termes comportant des exposants :

$$\frac{5^{10}\times 7^3-25^5\times 49^2}{(125\times 7)^3+5^9\times 14^3}=\frac{5^{10}\times 7^3-5^{10}\times 7^4}{5^9\times 7^3+5^9\times 7^3\times 2^3}=\frac{5^{10}\times 7^3(1-7)}{5^9\times 7^3(1+2^3)}=\frac{5\times(-6)}{9}=\frac{-10}{3}.$$

1.3 d) On calcule :

$$\frac{1\,978\times 1\,979+1\,980\times 21+1\,958}{1\,980\times 1\,979-1\,978\times 1\,979}=\frac{1\,978\times 1\,979+1\,979\times 21+21+1\,958}{1\,979\times(1\,980-1\,978)}$$
$$=\frac{1\,979\times(1\,978+21)+1\,979}{1\,979\times 2}=\frac{1\,979\times(1\,978+21+1)}{1\,979\times 2}=\frac{1\,979\times 2\,000}{1\,979\times 2}$$
$$=1\,000.$$

1.4 On calcule :

$$\frac{0{,}5-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}+\frac{0{,}5-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-0{,}2}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-3{,}5}=\frac{\frac{3}{6}-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-\frac{7}{2}}$$
$$=\frac{3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\right)}{5\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\right)}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{-7\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)}=\frac{3}{5}-\frac{1}{7}=\frac{16}{35}.$$

1.5 a) On met au même dénominateur. Cela donne :

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n}{n(n+1)^2}+\frac{n(n+1)}{n(n+1)^2}-\frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2}=\frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2}$$
$$=\frac{n+n^2+n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)^2}=\frac{-1}{n(n+1)^2}.$$

1.5 b) On rappelle la formule : $a^3-b^3=(a-b)\big(ab+a^2+b^2\big)$. Cela donne :

$$\frac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{(a-b)\big(ab+a^2+b^2\big)}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{ab+a^2+b^2}{a-b}-\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}=-\frac{ab}{a-b}.$$

1.5 c) Pour $n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1,2\}$, on a :

$$\frac{\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\dfrac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}=\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}\times\frac{n^2(n-1)^2}{2n+2}=\frac{6(n+1)}{2(n-1)}\times\frac{n(n-1)}{2(n+1)}=\frac{3}{2}n.$$

1.6 a) $\dfrac{3}{5}=\dfrac{27}{45}>\dfrac{5}{9}=\dfrac{25}{45}$

1.6 c) $\dfrac{125}{25}=5=\dfrac{105}{21}$

Fiche n$^{\text{o}}$ 2. Puissances

Réponses

2.1 a) .... $\boxed{10^8}$

2.1 b) .... $\boxed{10^{15}}$

2.1 c) .... $\boxed{10^2}$

2.1 d) .... $\boxed{10^{-2}}$

2.1 e) .... $\boxed{10^4}$

2.1 f) .... $\boxed{10^{-8}}$

2.2 a) .... $\boxed{15^4}$

2.2 b) .... $\boxed{5^{-6}}$

2.2 c) .... $\boxed{2^7}$

2.2 d) .... $\boxed{(-7)^{-2}}$

2.2 e) .... $\boxed{3^5}$

2.2 f) .... $\boxed{3^{28}}$

2.3 a) ...... $\boxed{2^{-4}\cdot 3^{-1}}$

2.3 b) .... $\boxed{2^{21}\cdot 3}$

2.3 c) .... $\boxed{2}$

2.3 d) .... $\boxed{2^{38}\cdot 3^{26}}$

2.4 a) .... $\boxed{8}$

2.4 b) .... $\boxed{11}$

2.4 c) .... $\boxed{3^{10}}$

2.4 d) .... $\boxed{2^6\cdot 5}$

2.5 a) .... $\boxed{\dfrac{x}{x+1}}$

2.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{x-2}}$

2.5 c) .... $\boxed{\dfrac{2x}{x+1}}$

2.5 d) .... $\boxed{\dfrac{2}{x-2}}$

Corrigés

2.3 a) $\dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 6^{-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 2^{-1}\cdot 3^{-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^{4-1}\cdot 2^{8-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^3\cdot 2^7} = 2^{3-7}\cdot 3^{2-3} = 2^{-4}\cdot 3^{-1}.$

2.3 b) On factorise : $2^{21}+2^{22} = 2^{21}+2^{21}\cdot 2 = 2^{21}\cdot(1+2) = 2^{21}\cdot 3.$

2.3 c) On factorise au numérateur et au dénominateur : $\dfrac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}} = \dfrac{(3+1)\cdot 3^{21}}{(3-1)\cdot 3^{21}} = \dfrac{4}{2} = 2.$

2.3 d) On simplifie en appliquant les règles habituelles de calcul avec les puissances, et en exploitant le fait que $(-a)^n = a^n$ lorsque n est pair : $\dfrac{\left(3^2\cdot(-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5\cdot 2^3\right)^{-2}} = \dfrac{3^{16}\cdot 2^{32}}{3^{-10}\cdot 2^{-6}} = 2^{38}\cdot 3^{26}.$

2.4 a) On fait apparaitre les facteurs premiers 2 et 3 : $\dfrac{8^{17}\cdot 6^{-6}}{9^{-3}\cdot 2^{42}} = \dfrac{2^{3\cdot 17}\cdot 2^{-6}\cdot 3^{-6}}{3^{2\cdot(-3)}\cdot 2^{42}} = \dfrac{2^{51-6}\cdot 3^{-6}}{3^{-6}\cdot 2^{42}} = 2^{45-42} = 2^3 = 8.$

2.4 b) Avec les facteurs premiers 5 et 11 : $\dfrac{55^2\cdot 121^{-2}\cdot 125^2}{275\cdot 605^{-2}\cdot 25^4} = \dfrac{(5\cdot 11)^2\cdot(11^2)^{-2}\cdot(5^3)^2}{5^2\cdot 11\cdot(11^2\cdot 5)^{-2}\cdot(5^2)^4} = \dfrac{5^8\cdot 11^{-2}}{5^8\cdot 11^{-3}} = 11.$

2.4 c) On fait apparaitre les facteurs premiers 2, 3 et 5 : $\dfrac{12^{-2}\cdot 15^4}{25^2\cdot 18^{-4}} = \dfrac{(2^2)^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 3^4\cdot 5^4}{(5^2)^2\cdot 2^{-4}\cdot(3^2)^{-4}} = \dfrac{2^{-4}\cdot 3^2\cdot 5^4}{2^{-4}\cdot 3^{-8}\cdot 5^4} = 3^{10}.$

2.4 d) Même méthode que précédemment : $\dfrac{36^3\cdot 70^5\cdot 10^2}{14^3\cdot 28^2\cdot 15^6} = \dfrac{2^6\cdot 3^6\cdot 2^5\cdot 5^5\cdot 7^5\cdot 2^2\cdot 5^2}{2^3\cdot 7^3\cdot 2^4\cdot 7^2\cdot 3^6\cdot 5^6} = \dfrac{2^{13}\cdot 3^6\cdot 5^7\cdot 7^5}{2^7\cdot 3^6\cdot 5^6\cdot 7^5} = 2^6\cdot 5.$

2.5 a) On met au même dénominateur les deux premières écritures fractionnaires : $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x^2+x-2x+2}{(x+1)(x-1)} - \dfrac{2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x^2-x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x}{x+1}$

2.5 b) Même méthode : $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4} = \dfrac{2(x-2)-(x+2)}{(x+2)(x-2)} + \dfrac{8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{2x-4-x-2+8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2}$

2.5 c) On commence par simplifier les puissances superflues, puis c'est le même principe que précédemment : $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x} = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1+x-1)}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x^2-2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x}{x+1}$

2.5 d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{x-2+x}{x(x-2)} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{2}{x-2}$

Fiche n° 3. Calcul littéral

Réponses

3.1 a) .... $\boxed{8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}}$

3.1 b) .... $\boxed{x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1}$

3.1 c) .... $\boxed{x^5 - x^3 + x^2 - 1}$

3.1 d) .... $\boxed{x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1}$

3.1 e) .... $\boxed{x^5 - x^3 - x^2 + 1}$

3.1 f) .... $\boxed{x^4 + x^2 + 1}$

3.2 a) .... $\boxed{-2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4}$

3.2 b) .... $\boxed{-28 + 21x}$

3.2 c) .... $\boxed{2 + x^3 - x^4 - x^5}$

3.2 d) .... $\boxed{-1 - 3x - 3x^2 + x^3}$

3.2 e) .... $\boxed{1 + x^4}$

3.2 f) .... $\boxed{1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4}$

3.3 a) .... $\boxed{-6(6x+7)}$

3.3 b) .... $\boxed{4(5x+4)(-5x+1)}$

3.3 c) .... $\boxed{2(3x-4)(10x+3)}$

3.3 d) .... $\boxed{-8(x+1)(x+16)}$

3.4 a) .... $\boxed{(x-1)^2}$

3.4 b) .... $\boxed{(x+2)^2}$

3.4 c) .... $\boxed{(x+1)(x+2)}$

3.4 d) .... $\boxed{3\left(x + \frac{7-\sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{7+\sqrt{37}}{6}\right)}$

3.4 e) .... $\boxed{2\left(x + \frac{3-\sqrt{233}}{4}\right)\left(x + \frac{3+\sqrt{233}}{4}\right)}$

3.4 f) .... $\boxed{-5(x-1)\left(x - \frac{1}{5}\right)}$

3.5 a) .... $\boxed{(x+y-z)(x+y+z)}$

3.5 b) .... $\boxed{3(14x+3y)(-4x+y)}$

3.5 c) .... $\boxed{(x+1)(y+1)}$

3.5 d) .... $\boxed{(x-1)(y-1)}$

3.5 e) .... $\boxed{(x+y)(x+1)^2}$

3.5 f) .... $\boxed{(a^2+b^2)(y-4x^2)(y+4x^2)}$

Corrigés

3.1 a) On utilise directement l'identité remarquable $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

....

3.1 b) On peut écrire : $(x-1)^3\big(x^2+x+1\big) = \big(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\big)\big(x^2+x+1\big) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$. Pour être “efficace”, il suffit de rechercher directement le coefficient du terme d'un degré donné (sachant que $(ax^n)(bx^p) = abx^{n+p}$). Par exemple, dans l'expression finale et en utilisant l'étape intermédiaire, le coefficient du terme de degré 2 est donné par $(-3)\times 1 + 3 \times 1 + (-1) \times 1 = -1$. Ici, l'étape intermédiaire n'étant pas compliquée (à effectuer et à retenir), on peut (éventuellement) se passer de l'écrire.

....

3.1 c) Connaissant les identités remarquables $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ et $(x+1)\big(x^2 - x + 1\big) = x^3 + 1$, on a facilement :

$$(x+1)^2(x-1)\big(x^2 - x + 1\big) = [(x+1)(x-1)]\big[(x+1)\big(x^2-x+1\big)\big] = \big(x^2-1\big)\big(x^3+1\big) = x^5 - x^3 + x^2 - 1.$$

Que pensez-vous de la nécessité d'écrire les étapes intermédiaires ?

....

3.1 d) On calcule : $(x+1)^2(x-1)\big(x^2+x+1\big) = \big(x^2+2x+1\big)\big(x^3-1\big) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$.

....

3.1 e) On calcule : $(x-1)^2(x+1)\big(x^2+x+1\big) = \big(x^2-1\big)\big(x^3-1\big) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$.

....

3.3 a) Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x+7$. On calcule alors

$$-(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49 = -(6x+7)(6x-1) + (6x)^2 - 7^2 = (6x+7)[-(6x-1) + 6x - 7] = -6(6x+7)$$

.

3.3 b) On calcule $25-(10x+3)^2=5^2-(10x+3)^2=(10x+8)(-10x+2)=4(5x+4)(-5x+1)$.

3.4 c) La forme canonique est $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$. On en déduit la factorisation à l'aide de l'identité remarquable $a^2-b^2=\dots$

3.4 d) La forme canonique est $3\left[\left(x+\dfrac{7}{6}\right)^2-\dfrac{37}{36}\right]$.

3.4 e) La forme canonique est $2\left[\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{233}{16}\right]$.

3.4 f) La forme canonique est $-5\left[\left(x-\dfrac{3}{5}\right)^2-\dfrac{4}{25}\right]$.

3.5 b) On calcule $x^2+6xy+9y^2-169x^2=(x+3y)^2-(13x)^2=(14x+3y)(-12x+3y)=3(14x+3y)(-4x+y)$.

3.5 e) On calcule $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y=(x+y)(x^2+2x+1)=(x+y)(x+1)^2$.

Fiche n° 4. Racines carrées

Réponses

4.1 a) .... $\boxed{5}$

4.1 b) .... $\boxed{\sqrt{3}-1}$

4.1 c) .... $\boxed{-\sqrt{3}+2}$

4.1 d) .... $\boxed{\sqrt{7}-2}$

4.1 e) .... $\boxed{\pi-3}$

4.1 f) .... $\boxed{|3-a|}$

4.2 a) .... $\boxed{20}$

4.2 b) .... $\boxed{9+4\sqrt{5}}$

4.2 c) .... $\boxed{1+\sqrt{3}}$

4.2 d) .... $\boxed{3+\sqrt{2}}$

4.2 e) .... $\boxed{12\sqrt{7}}$

4.2 f) .... $\boxed{12}$

4.2 g) .... $\boxed{9-\dfrac{10}{3}\sqrt{2}}$

4.2 h) .... $\boxed{10}$

4.3 a) .... $\boxed{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{6}}$

4.3 b) .... $\boxed{3-2\sqrt{2}}$

4.3 c) .... $\boxed{-(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

4.3 d) .... $\boxed{-\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}}$

Corrigés

4.1 a) Quand a est un réel positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a donc $\sqrt{(-5^2)} = 5$.

4.1 f) On trouve $|3-a|$, c'est-à-dire $3-a$ si $a \leqslant 3$ et $a-3$ si $a \geqslant 3$.

4.2 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+3} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1+\sqrt{3}.$$

4.3 a) On calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} &= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} \times \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} \\
&= \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{2^2-2} = \frac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2} \\
&= 2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

Fiche n° 5. Expressions algébriques

Réponses

5.1 a) .... $\boxed{7a^2+12a+7}$

5.1 b) .... $\boxed{a^2-a-1}$

5.1 c) .... $\boxed{4a^2-a-3}$

5.1 d) .... $\boxed{-a^2+1}$

5.2 a) .... $\boxed{8+6\mathrm{i}}$

5.2 b) .... $\boxed{8-6\mathrm{i}}$

5.2 c) .... $\boxed{18-26\mathrm{i}}$

5.2 d) .... $\boxed{-9-46\mathrm{i}}$

5.3 a) .... $\boxed{39-18\mathrm{i}}$

5.3 b) .... $\boxed{2197}$

5.3 c) .... $\boxed{-4+43\mathrm{i}\sqrt{5}}$

5.3 d) .... $\boxed{1}$

Corrigés

5.1 a) On développe $(a+2)^3 = a^3+6a^2+12a+8$, puis on simplifie sachant que $a^3 = a^2-1$.

5.1 b) De $a^3 = a^2-1$, on déduit $a^6 = a^3(a^2-a) = a^5-a^4$ et donc $a^5-a^6 = a^4$. De plus $a^4 = a(a^2-1)$, *etc.*

5.1 c) On commence par $a^6 = (a^3)^2 = (a^2-1)^2 = a^4-2a^2+1 = -a^2-a$ puis $a^{12} = (-a^2-a)^2 = a^4+2a^3+a^2$.

5.1 d) L'égalité a^3-a^2+1 peut s'écrire $a(a-a^2) = 1$ ce qui montre que $a \neq 0$ et $\dfrac{1}{a} = a-a^2$. Alors $\dfrac{1}{a^2} = 1-a$.

5.2 a) On développe : $(3+\mathrm{i})^2 = 9+6\mathrm{i}+\mathrm{i}^2$.

5.2 b) On développe : $(3-\mathrm{i})^2 = 9+6(-\mathrm{i})+(-\mathrm{i})^2 = 9-6\mathrm{i}+\mathrm{i}^2$.

5.2 c) D'après le calcul précédent : $(3-\mathrm{i})^3 = (8-6\mathrm{i})(3-\mathrm{i}) = 24-18\mathrm{i}-8\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2$.

5.2 d) On développe directement : $(3-2\mathrm{i})^3 = 3^3-3\cdot 3^2(2\mathrm{i})^1+3\cdot 3^1(2\mathrm{i})^2-(2\mathrm{i})^3$.

5.3 a) On développe : $24-30\mathrm{i}+12\mathrm{i}-15\mathrm{i}^2$.

5.3 b) En remarquant que $(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i}) = 2^2-(3\mathrm{i})^2 = 4+9$, on obtient par associativité 13^3.

5.3 c) On développe : $(-4+\mathrm{i}\sqrt{5})^3 = -4^3+3\cdot 4^2(\mathrm{i}\sqrt{5})-3\cdot 4^1(\mathrm{i}\sqrt{5})^2+(\mathrm{i}\sqrt{5})^3 = -64+48\mathrm{i}\sqrt{5}+60-5\mathrm{i}\sqrt{5}$.

5.3 d) On développe : $(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = -\dfrac{1}{8}+3\cdot i\dfrac{\sqrt{3}}{8}+3\cdot\dfrac{3}{8}-i\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

Fiche n^o 6. Équations du second degré

Réponses

6.1 a) .... $\boxed{3, 3}$

6.1 b) .... $\boxed{-1/3, -1/3}$

6.1 c) .... $\boxed{2, -6}$

6.1 d) .... $\boxed{2, 3}$

6.1 e) .... $\boxed{0, \text{ donc } 5}$

6.1 f) .... $\boxed{0, \text{ donc } -3/2}$

6.1 g) .... $\boxed{\varnothing}$

6.1 h) .... $\boxed{1 \text{ donc } -5}$

6.1 i) .... $\boxed{1 \text{ donc } 8/3}$

6.1 j) .... $\boxed{-1 \text{ donc } -19/5}$

6.2 a) .... $\boxed{6, 7}$

6.2 b) .... $\boxed{-3, -5}$

6.2 c) .... $\boxed{-7, -11}$

6.2 d) .... $\boxed{-3, 11}$

6.2 e) .... $\boxed{a, b}$

6.2 f) .... $\boxed{a - b, a + b}$

6.3 a) .... $\boxed{2/3}$

6.3 b) .... $\boxed{-2/7}$

6.3 c) .... $\boxed{-1/m}$

6.3 d) .... $\boxed{2m/(m + 3)}$

6.4 a) .... $\boxed{m = -3/4 \text{ et } x = 3/4}$

6.4 b) ... $\boxed{m = -1 \text{ et } x = -2, \text{ ou } m = 7 \text{ et } x = 2/3}$

6.4 c) ...... $\boxed{m = 1 \text{ et } x = -1 \text{ ou } m = -1 \text{ et } x = 1}$

6.5 a) .... $\boxed{a = 2 \text{ et } b = 3}$

6.5 b) .... $\boxed{a = -2 \text{ et } b = 1}$

6.5 c) .... $\boxed{a = -3 \text{ et } b = 5}$

6.5 d) .... $\boxed{a = 1/2 \text{ et } b = 8}$

6.5 e) .... $\boxed{a = 1 \text{ et } b = 3\sqrt{7}}$

6.6 a) .... $\boxed{]-\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[}$

6.6 b) .... $\boxed{[-3, 5]}$

6.6 c) .... $\boxed{]-\infty, -1] \cup [2/3, +\infty[}$

6.6 d) .... $\boxed{]-\infty, -1/2[\cup [4, +\infty[}$

Corrigés

6.1 a) C'est une identité remarquable : $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

....

6.1 c) Le nombre 2 est racine évidente, l'autre est donc -6 en regardant le produit des racines qui vaut -12.

....

6.1 e) La racine 0 est la racine évidente par excellence ; la somme des racines valant ici 5 l'autre racine est 5.

....

6.1 g) La fonction $x \longmapsto 2x^2 + 3$ est strictement postivie car elle est minorée par 3, donc elle ne s'annule pas.

....

6.2 a) Ici on cherche des racines un peu moins évidentes : on remplace le problème par le problème équivalent de la détermination de deux nombres x_1, x_2 dont le produit vaut 42 et la somme 13. On teste donc les factorisations évidentes de 42, ici $42 = 6 \times 7$ et $13 = 6 + 7$.

....

6.2 b) On cherche deux nombres dont le produit vaut 15 et la somme -8 : les nombres -3 et -5 conviennent.

....

6.4 a) Une équation du second degré admet une racine double si, et seulement si, son discriminant est nul.

Ici, le discriminant vaut $\Delta = (2m + 3)^2 - 4m^2 = 3(4m - 3)$. Ainsi, l'équation admet une racine double si, et seulement si, m vaut $-3/4$ ce qui donne $x = 3/4$.

....

6.4 b) Ici, le déterminant vaut $\Delta = 4(m^2 - 6m - 7)$, donc une racine évidente est -1 donc l'autre vaut 7. Pour $m = -1$ on trouve $x = -2$ et pour $m = 7$ on trouve $x = 2/3$.

....

6.4 c) Ici le discriminant vaut $\Delta = 4((3m+1)^2 - (m+3)^2) = 32(m^2 - 1)$ donc l'équation admet une racine double si et seulement si m vaut 1, auquel cas l'équation s'écrit $x^2 + 2x + 1 = 0$ et la racine double est -1, ou m vaut -1, auquel cas l'équation s'écrit $x^2 - 2x + 1 = 0$ dont la racine double est 1.

....

6.6 a) Un trinôme est du signe du coefficient dominant à l'extérieur de l'intervalle des racines, et du signe opposé entre les racines. Ici, les racines sont $\sqrt{2}$ et 1, le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, 1[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ et strictement négatif sur $]1, \sqrt{2}[$.

....

6.6 b) Les racines sont -5 et 3. Le trinôme est donc strictement négatif sur $]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$ et strictement positif sur $]-3, 5[$.

....

6.6 c) Ici, les racines sont -1 et $2/3$. Le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, -1[\cup]2/3, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-1, 2/3[$.

....

6.6 d) Le signe d'un quotient est le même que celui d'un produit ! Donc le quotient considéré est strictement positif sur $]-\infty, -1/2[\cup]4, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-1/2, 4[$ (attention à l'annulation du dénominateur !).

....

Fiche n° 7. Systèmes linéaires

Réponses

7.1 a) .... $\boxed{\{(3,1)\}}$

7.1 b) .... $\boxed{\{(7,2)\}}$

7.2 a) .... $\boxed{\left\{(1-\frac{a}{4}, \frac{-1}{2}+\frac{3}{8}a)\right\}}$

7.2 b) .... $\boxed{(a-2a^2, a+a^2)}$

7.3 a) .... $\boxed{\{(1+z,-z,z) ; z\in\mathbb{R}\}}$

7.3 b) .... $\boxed{\{(1,y,3+2y) ; y\in\mathbb{R}\}}$

7.4 a) .... $\boxed{\{(2,-1,3)\}}$

7.4 b) .... $\boxed{\varnothing}$

7.4 c) .... $\boxed{\left\{(-\frac{2}{7}-z, \frac{-3}{7}, z) \,;\, z\in\mathbb{R}\right\}}$

Corrigés

7.1 a) On calcule :

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+4y=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ 3(1+2y)+4y=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ 10y+3=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y=10 \\ x=1+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=3 \end{cases}$$

7.1 b) On calcule : $\begin{cases} 2x+y=16 \\ x-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=16-2x \\ x-16+2x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=5+16=21 \\ y=16-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=16-14=2 \end{cases}$

7.2 a) On calcule : $\begin{cases} 3x+2y=2 \\ 2x+4y=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-\frac{3}{2}x \\ 2x+4-6x=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-\frac{3}{2}x \\ -4x=a-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\frac{a}{4} \\ y=1-\frac{3}{2}+\frac{3}{8}a=\frac{-1}{2}+\frac{3}{8}a \end{cases}$

7.2 b) On calcule :

$$\begin{cases} x+2y=3a \\ 2x+3y=5a-a^2 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y=3a \\ -y=5a-a^2-6a=-a^2-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=a+a^2 \\ x=3a-2(a+a^2)=a-2a^2 \end{cases}$$

7.3 a) On calcule : $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x+y-2z=3 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-3L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y+z=1 \\ -5y-5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-z \\ x-2z+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+z \\ y=-z \end{cases}$

7.3 b) On calcule : $\begin{cases} 3x-2y+z=6 \\ x+2y-z=-2 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 4x=4 \\ x+2y-z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2y-z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=2y+3 \end{cases}$

7.4 a) On calcule :

$$\begin{cases} x+2y-z=-3 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x+y+2z=11 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-3L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ -5y+3z=14 \\ -5y+5z=20 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ -5y+3z=14 \\ 2z=6 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ x+2y-3=-3 \\ -5y+3\times 3=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ x+2y=0 \\ -5y=14-9=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ y=-1 \\ x=-2y=2 \end{cases}$$

7.4 b) On calcule : $\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2x-y+2z=-1 \\ x+10y+z=0 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+3y+z=1 \\ -7y=-3 \\ 7y=-1 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+3y+z=1 \\ -7y=-3 \\ 0=-4 \end{cases}.$

Le système est incompatible car l'équation $0=-4$ n'a pas de solution.

7.4 c) On va extraire y de la deuxième équation, puis résoudre par substitution. On calcule :

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+2y+3z=0 \\ 2x-y+2z=-1 \\ 4x+5y+4z=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2x+2z+1 \\ 3x+4x+4z+2+3z=0 \\ 4x+10x+10z+5+4z=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2x+2z+1 \\ 7x+7z=-2 \\ 14x+14z=-4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2x+2z+1 \\ x=-z-\dfrac{2}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-z-\dfrac{2}{7} \\ \\ y=-2z-\dfrac{4}{7}+2z+1=\dfrac{3}{7} \end{array}\right.$$

Fiche n° 8. Coefficients binomiaux

Réponses

8.1 a) .... $\boxed{10\,100}$

8.1 b) .... $\boxed{720}$

8.1 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{30}}$

8.1 d) .... $\boxed{15}$

8.1 e)...................... $\boxed{56}$

8.1 f)...................... $\boxed{140}$

8.2 a) .... $\boxed{\dfrac{9!}{5!}}$

8.2 b) .... $\boxed{\dbinom{9}{4}}$

8.2 c).................. $\boxed{2^n \times n!}$

8.2 d) .... $\boxed{\dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}}$

8.3 a)................ $\boxed{\dfrac{n(n-1)}{2}}$

8.3 b)......... $\boxed{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}$

8.3 c)................... $\boxed{\dfrac{k+1}{n-k}}$

8.3 d) .... $\boxed{(n+2)(n+1)}$

8.3 e)................. $\boxed{\dfrac{1}{(n+1)!}}$

8.3 f)............. $\boxed{\dfrac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}}$

8.4 a) .... $\boxed{\dfrac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}}$

8.4 b)....... $\boxed{\dfrac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}}$

Corrigés

8.1 a) On calcule : $\dfrac{101!}{99!} = \dfrac{101 \times 100!}{99!} = \dfrac{101 \times 100 \times 99!}{99!} = 101 \times 100 = 10100$.

....

8.1 b) On calcule : $\dfrac{10!}{7!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$.

....

8.1 c) On calcule : $\dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!} = \dfrac{5}{5 \times 4!} - \dfrac{1}{5!} = \dfrac{5-1}{5!} = \dfrac{4}{5!} = \dfrac{4}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = \dfrac{1}{30}$.

....

8.1 d) On calcule : $\dbinom{6}{2} = \dfrac{6!}{2! \times 4!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!} = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15$.

....

8.1 e) On calcule : $\dbinom{8}{3} = \dfrac{8!}{3! \times 5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{2 \times 3} = 8 \times 7 = 56$.

....

8.1 f) On calcule : $4 \times \dbinom{7}{4} = 4 \times \dfrac{7!}{4! \times 3!} = \dfrac{4 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{4 \times 3! \times 3!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 3} = 140$.

....

8.2 a) Par définition, $9! = (2 \times 3 \times 4 \times 5) \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 5! \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$. Donc, $6 \times 7 \times 8 \times 9 = \dfrac{9!}{5!}$.

....

8.2 b) Comme pour le calcul précédent, on a $6 \times 7 \times 8 \times 9 = \dfrac{9!}{5!}$. Or, $2 \times 3 \times 4 = 4!$. Ainsi,

$$\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4} = \frac{9!}{5!} \times \frac{1}{4!} = \binom{9}{4} = \binom{9}{5}.$$

....

8.2 c) On peut mettre 2 en facteur de chaque nombre du produit $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$, produit qui contient n facteurs. Ainsi,

$$2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n) = 2^n \times (1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n) = 2^n \times n!.$$

....

8.2 d) On multiplie le produit $3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1)$ par le produit $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$ de la question précédente. On obtient ainsi le produit de tous les entiers compris entre 2 et $(2n+1)$. Il s'agit donc de $(2n+1)!$.

Donc, on a

$$3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}.$$

....

8.3 a) Par définition, $\binom{n}{2} = \dfrac{n!}{2! \times (n-2)!} = \dfrac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2! \times (n-2)!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

8.3 b) Par définition, $\binom{n}{3} = \dfrac{n!}{3! \times (n-3)!} = \dfrac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)!}{3! \times (n-3)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

8.3 c) On calcule

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{\frac{n!}{k!\times(n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)!\times(n-(k+1))!}} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \times \frac{(k+1)! \times (n-(k+1))!}{n!}$$
$$= \frac{(k+1) \times k! \times (n-k-1)!}{k! \times (n-k) \times (n-k-1)!} = \frac{k+1}{n-k}.$$

8.3 d) On calcule $\dfrac{(n+2)!}{n!} = \dfrac{(n+2) \times (n+1) \times n!}{n!} = (n+2)(n+1)$.

8.3 e) On réduit au même dénominateur $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{n+1}{(n+1) \times n!} - \dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1)-n}{(n+1)!} = \dfrac{1}{(n+1)!}$.

8.3 f) On réduit au même dénominateur

$$\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}} = \frac{(n+1)!}{2^{2n+2}} - \frac{2^2 \times n!}{2^2 \times 2^{2n}} = \frac{(n+1)! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{(n+1) \times n! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}.$$

8.4 a) On met chaque terme au même dénominateur, à savoir $2n(n+2)!$) :

$$\frac{1}{n!} = \frac{2n(n+1)(n+2)}{n! \times 2n(n+1)(n+2)}$$
$$\frac{1}{2n \times (n+1)!} = \frac{n+2}{2n \times (n+1)! \times (n+2)}$$
$$\text{et} \quad \frac{1}{2 \times (n+2)!} = \frac{n}{2 \times (n+2)! \times n}.$$

D'où,

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!} = \frac{2n(n+1)(n+2) + n + 2 + n}{2n \times (n+2)!}$$
$$= \frac{2(n+1)(n(n+2)+1)}{2n \times (n+2)!} = \frac{(n+1)(n^2+2n+1)}{n(n+2)!}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!} = \frac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}.$$

8.4 b) On a

$$\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \frac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3} = \frac{(3n+3)!}{a^{3n+3} \times ((n+1)!)^3} \times \frac{a^{3n} \times (n!)^3}{(3n)!}.$$

Or,

$$(3n+3)! = (3n+3) \times (3n+2) \times (3n+1) \times (3n)!$$
$$a^{3n+3} = a^{3n} \times a^3$$
$$((n+1)!)^3 = ((n+1) \times n!)^3 = (n+1)^3 \times (n!)^3.$$

Ainsi,

$$\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \frac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{a^3 \times (n+1)^3}$$
$$= \frac{3(n+1)(3n+2)(3n+1)}{a^3 \times (n+1)^3} = \frac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}.$$

Fiche n° 9. Exponentielle et logarithme

Réponses

9.1 a) .... $\boxed{4\ln 2}$

9.1 b) .... $\boxed{9\ln 2}$

9.1 c) .... $\boxed{-3\ln 2}$

9.1 d) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln 2}$

9.1 e) .... $\boxed{3\ln 2}$

9.1 f) .... $\boxed{2\ln 2 + 2\ln 3}$

9.2 .... $\boxed{-2\ln 2 - 2\ln 5}$

9.3 a) .... $\boxed{8}$

9.3 b) .... $\boxed{\frac{1}{2}}$

9.3 c) .... $\boxed{\frac{1}{3}}$

9.3 d) .... $\boxed{\frac{1}{9}}$

9.3 e) .... $\boxed{-\frac{1}{2}}$

9.3 f) .... $\boxed{\frac{3}{2}}$

9.3 g) .... $\boxed{1}$

9.3 h) .... $\boxed{-1}$

9.4 a) .... $\boxed{x \geqslant \frac{\ln 12 + 5}{3}}$

9.4 b) .... $\boxed{x \in [0, 1]}$

9.4 c) .... $\boxed{x \geqslant \frac{2}{e}}$

9.4 d) .... $\boxed{x \geqslant -\frac{1}{12}}$

9.4 e) .... $\boxed{\varnothing}$

9.4 f) .... $\boxed{\frac{-13 - \sqrt{273}}{2}}$

Corrigés

9.1 a) On a $16 = 4^2 = 2^4$ donc $\ln 16 = 4\ln 2$.

9.1 c) On a $0{,}125 = \dfrac{1}{8}$ donc $\ln 0,125 = -\ln 8 = -3\ln 2$.

9.1 e) On a $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ donc $\ln 72 - 2\ln 3 = (3\ln 2 + 2\ln 3) - 2\ln 3 = 3\ln 2$.

9.2 On appelle A ce nombre. On a

$$A = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + (\ln 98 - \ln 99) + (\ln 99 - \ln 100)$$

donc en simplifiant les termes deux par deux finalement il reste $A = \ln 1 - \ln 100$, c'est-à-dire $A = -\ln 100$ où $100 = 2^2 \times 5^2$, d'où le résultat $A = -2(\ln 2 + \ln 5)$

9.3 h) On a $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln \mathrm{e}^2)}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\exp(-\ln \mathrm{e}^2)\right) = \dfrac{1}{2}(-\ln \mathrm{e}^2)) = \dfrac{1}{2} \times (-2) = -1$.

9.4 f) Pour la première équation, on cherche les solutions dans $]-\infty, -5[\cap \Big( ]61, +\infty[\cap]-\infty, -7[\Big)$, qui est l'ensemble vide, donc la première équation n'admet aucune solution.

Pour la seconde, on cherche les solutions dans $]-\infty, -5[\cap \Big( ]-\infty, -7[\cup]61, +\infty[\Big)$, c'est-à-dire dans l'intervalle $]-\infty, -7[$. Dans ce cas, un réel x appartenant à $]-\infty, -7[$ est solution de l'équation si et seulement si x vérifie $x^2 + 13x - 26 = 0$. Or, ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-13 - \sqrt{273}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-13 + \sqrt{273}}{2}$. Seul x_1 convient car $x_1 \in]-\infty, -7[$ et $x_2 \notin]-\infty, -7[$.

Fiche n° 10. Trigonométrie

Réponses

10.1 a) $\boxed{0}$

10.1 b) $\boxed{0}$

10.1 c) $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

10.2 a) $\boxed{0}$

10.2 b) $\boxed{-\sin x}$

10.2 c) $\boxed{2\cos x}$

10.2 d) $\boxed{-2\cos x}$

10.3 a) $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

10.3 b) $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

10.3 c) $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

10.4 a) $\boxed{-\sin x}$

10.4 b) $\boxed{\dfrac{1}{\cos x}}$

10.4 c) $\boxed{0}$

10.4 d) $\boxed{4\cos^3 x - 3\cos x}$

10.5 a) $\boxed{\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

10.5 b) $\boxed{\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

10.6 a) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}}$

10.6 a) $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right\}}$

10.6 a) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

10.6 b) $\boxed{\left\{\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}}$

10.6 b) $\boxed{\left\{\dfrac{-2\pi}{3}, \dfrac{-\pi}{3}\right\}}$

10.6 b) $\boxed{\left\{\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

10.6 c) $\boxed{\left\{\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}}$

10.6 c) $\boxed{\left\{-\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}\right\}}$

10.6 c) $\boxed{\left\{\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

10.6 d) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\dfrac{7\pi}{4}\right\}}$

10.6 d) $\boxed{\left\{-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}}$

10.6 d) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

10.6 e) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{23\pi}{12}\right\}}$

10.6 e) $\boxed{\left\{-\dfrac{11\pi}{12}, -\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}\right\}}$

10.6 e) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{11\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

10.6 f) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}}$

10.6 f) $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}}$

10.6 f) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

10.6 g) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{7}, \dfrac{13\pi}{7}\right\}}$

10.6 g) $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{7}, \dfrac{\pi}{7}\right\}}$

10.6 g) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{7}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{7}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

10.6 h) $\boxed{\left\{\dfrac{5\pi}{14}, \dfrac{9\pi}{14}\right\}}$

10.6 h) $\boxed{\left\{\dfrac{5\pi}{14}, \dfrac{9\pi}{14}\right\}}$

10.6 h) $\boxed{\left\{\dfrac{5\pi}{14}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{9\pi}{14}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

10.7 a) $\boxed{\left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{4}, 2\pi\right]}$

10.7 a) $\boxed{\left[-\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]}$

10.7 b) .... $\boxed{\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right]}$

10.7 b) .... $\boxed{\left[-\pi, -\dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]}$

10.7 c) .... $\boxed{\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6}, 2\pi\right]}$

10.7 c) .... $\boxed{\left[-\pi, \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right]}$

10.7 d) .... $\boxed{\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{11\pi}{6}, 2\pi\right]}$

10.7 d) .... $\boxed{\left[-\pi, -\dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right]}$

10.7 e) .... $\boxed{\left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right]}$

10.7 e) .... $\boxed{\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]}$

10.7 f) .... $\boxed{\left[0, \dfrac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{8}, \dfrac{11\pi}{8}\right] \cup \left[\dfrac{15\pi}{8}, 2\pi\right]}$

10.7 f) .... $\boxed{\left[-\pi, -\dfrac{5\pi}{8}\right] \cup \left[-\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{8}, \pi\right]}$

Corrigés

10.3 b) On peut utiliser $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$ puis les formules d'addition.

10.4 b) On a

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(2x - x)}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

On peut aussi faire cette simplification à l'aide des formules de duplication :

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{2\sin x \cos x}{\sin x} - \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

10.4 d) On calcule

$$\begin{aligned}\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x \sin^2 x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.\end{aligned}$$

10.5 a) On a $\cos\dfrac{\pi}{4} = 2\cos^2\dfrac{\pi}{8} - 1$ donc $\cos^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}+2}{4}$. De plus, $\cos\dfrac{\pi}{8} \geqslant 0$ donc $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

10.5 b) On a $\sin^2\dfrac{\pi}{8} = 1 - \cos^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$et $\sin\dfrac{\pi}{8} \geqslant 0$ donc $\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

10.6 d) Cela revient à résoudre « $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ».

10.6 e) Si on résout avec $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = 2x \in [0, 4\pi]$.

Or, dans $[0, 4\pi]$, on a $\cos t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour $t \in \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}, \dfrac{13\pi}{6}, \dfrac{23\pi}{6}\right\}$ et donc pour $x \in \left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{23\pi}{12}\right\}$.

10.6 f) $\sin x$ est solution de l'équation de degré 2 : $2t^2 + t - 1 = 0$ dont les solutions sont $t = -1$ et $t = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, les x solutions sont les x tels que $\sin x = -1$ ou $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

10.6 h) On a $\cos\dfrac{\pi}{7} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{7}\right) = \sin\dfrac{5\pi}{14}$. Finalement, on résout $\sin x = \sin\dfrac{5\pi}{14}$.

10.7 d) Cela revient à résoudre $-\dfrac{1}{2} \leqslant \sin x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

10.7 e) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = x - \dfrac{\pi}{4} \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos t \geqslant 0$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right]$ ce qui donne $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$ et donc $x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

10.7 f) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = 2x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, 4\pi - \frac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos t \geqslant 0$ pour $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, 4\pi - \frac{\pi}{4}\right]$ ce qui donne $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{15\pi}{4}\right]$ puis $x \in \left[0, \frac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{15\pi}{8}, 2\pi\right]$.

Fiche n° 11. Dérivation

Réponses

11.1 a) $6x^2 + 2x - 11$

11.1 b) $5x^4 - 6x^2 + 4x - 15$

11.1 c) $(2x^2 - 2x + 10)\exp(2x)$

11.1 d) $(6x - 1)\ln(x - 2) + \dfrac{3x^2 - x}{x - 2}$

11.2 a) $5(x^2 - 5x)^4(2x - 5)$

11.2 b) $4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)$

11.2 c) $8\cos^2(x) - 6\cos(x)\sin(x) - 4$

11.2 d) $-3(3\cos(x) - \sin(x))^2(3\sin(x) + \cos(x))$

11.3 a) $\dfrac{2x}{x^2 + 1}$

11.3 b) $\dfrac{1}{x\ln(x)}$

11.3 c) $(-2x^2 + 3x + 1)\exp(x^2 + x)$

11.3 d) $6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$

11.4 a) $\dfrac{6x}{(x^2 + 1)^2}\cos\left(\dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$

11.4 b) $\dfrac{2x^2 + 2x - 8}{(x^2 + 4)^2}\sin\left(\dfrac{2x + 1}{x^2 + 4}\right)$

11.4 c) $\dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$

11.4 d) $\dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

11.5 a) $\dfrac{(2x + 3)(2\sin(x) + 3) - (x^2 + 3x) \times 2\cos(x)}{(2\sin(x) + 3)^2}$

11.5 b) $\dfrac{2 - 3x}{2\sqrt{x}(3x + 2)^2}$

11.5 c) $-2\dfrac{(x^2 + 1)\sin(2x + 1) + x\cos(2x + 1)}{(x^2 + 1)^2}$

11.5 d) $\dfrac{(4x + 3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$

11.6 a) $\dfrac{10x - 5}{(3 - x)^2(2 + x)^2}$

11.6 b) $\dfrac{2}{x + 1}\left(x + \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)$

11.6 c) $\dfrac{2x^2 + 2x + 5}{(x + 2)(x - 1)^2}$

11.6 d) $\dfrac{x^2}{(x + 1)^2}$

11.6 e) $\dfrac{2}{x(1 - \ln(x))^2}$

Corrigés

11.1 a) On calcule : $f'(x) = (2x + 3)(2x - 5) + (x^2 + 3x + 2) \times 2 = 6x^2 + 2x - 11$.

11.1 b) On calcule : $f'(x) = (3x^2 + 3)(x^2 - 5) + (x^3 + 3x + 2) \times 2x = 5x^4 - 6x^2 + 4x - 15$.

11.1 c) On calcule : $f'(x) = (2x - 2)\exp(2x) + (x^2 - 2x + 6) \times 2\exp(2x) = (2x^2 - 2x + 10)\exp(2x)$.

11.1 d) On calcule : $f'(x) = (6x - 1)\ln(x - 2) + (3x^2 - x) \times \dfrac{1}{x - 2} = (6x - 1)\ln(x - 2) + \dfrac{3x^2 - x}{x - 2}$.

11.2 a) On calcule : $f'(x) = 5(x^2 - 5x)^4(2x - 5)$.

11.2 b) On calcule : $f'(x) = 2(2x^3 + 4x - 1)(6x^2 + 4) = 4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)$.

11.2 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\sin(x) + 2\cos(x))(\cos(x) - 2\sin(x)) = 2(\sin(x)\cos(x) - 2\sin^2(x) + 2\cos^2(x) - 4\cos(x)\sin(x) \\ &= -6\cos(x)\sin(x) - 4\sin^2(x) + 4\cos^2(x) = -6\cos(x)\sin(x) - 4(1 - \cos^2(x)) + 4\cos^2(x) \\ &= 8\cos^2(x) - 6\cos(x)\sin(x) - 4. \end{aligned}$$

11.2 d) On calcule : $f'(x) = 3(3\cos(x) - \sin(x))^2(-3\sin(x) - \cos(x)) = -3(3\cos(x) - \sin(x))^2(3\sin(x) + \cos(x))$.
En développant, on trouve : $f'(x) = -54\cos^2(x)\sin(x) - 78\cos^3(x) - 9\sin(x) + 51\cos(x)$.

11.3 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. C'est une application directe de la formule de dérivation quand $f = \ln \circ u$.

11.3 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{1/x}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

11.3 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)\exp(x^2 + x) + (2 - x)\exp(x^2 + x) \times (2x + 1) = (-1 + (2 - x)(2x + 1))\exp(x^2 + x) \\ &= (-1 + 4x + 2 - 2x^2 - x)\exp(x^2 + x) = (-2x^2 + 3x + 1)\exp(x^2 + x). \end{aligned}$$

11.3 d) On calcule : $f'(x) = \exp(3\sin(2x))(3 \times 2\cos(2x)) = 6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$.

11.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\Big(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\Big) \times \frac{4x(x^2+1) - (2x^2-1) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \cos\Big(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\Big)\frac{4x^3 + 4x - 4x^3 + 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{6x}{(x^2+1)^2}\cos\Big(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\Big). \end{aligned}$$

11.4 b) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin\Big(\frac{2x+1}{x^2+4}\Big) \times \frac{2(x^2+4) - (2x+1) \times 2x}{(x^2+4)^2} = -\sin\Big(\frac{2x+1}{x^2+4}\Big) \times \frac{2x^2 + 8 - 4x^2 - 2x}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x - 8}{(x^2+4)^2}\sin\Big(\frac{2x+1}{x^2+4}\Big). \end{aligned}$$

11.4 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin(x)}}\cos(x) = \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$.

11.4 d) On calcule : $f'(x) = \cos(\sqrt{x}) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

11.5 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3) - (x^2+3x) \times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$. En développant le numérateur, on trouve

$$f'(x) = \frac{-2x^2\cos(x) + 4x\sin(x) - 6x\cos(x) + 6\sin(x) + 6x + 9}{(2\sin(x)+3)^2}.$$

11.5 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+2) - \sqrt{x} \times 3}{(3x+2)^2} = \dfrac{\frac{3x+2}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(3x+2)^2} = \dfrac{3x + 2 - 6x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2} = \dfrac{2 - 3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}$

11.5 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{-2\sin(2x+1) \times (x^2+1) - \cos(2x+1) \times 2x}{(x^2+1)^2} = -2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1) + x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}$.

11.5 d) On calcule : $f'(x) = \dfrac{(4x+3)\ln(x) - (2x^2+3x)\dfrac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \dfrac{(4x+3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$

11.6 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{-(-1)}{(3-x)^2} + \dfrac{-1}{(2+x)^2} = \dfrac{(2+x)^2 - (3-x)^2}{(3-x)^2(2+x)^2} = \dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$.

11.6 b) On calcule : $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x(x+1)-1}{x+1} = \dfrac{2x^2+2x-1}{x+1}$.

Pour le trinôme $2x^2 + 2x - 1$, on calcule $\Delta = 4 - 4 \times 2 \times (-1) = 12$. On a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{12}}{2 \times 2} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}.$$

Enfin, on a $f'(x) = \dfrac{2(x - \frac{-1-\sqrt{3}}{2})(x - \frac{-1+\sqrt{3}}{2})}{x+1} = \dfrac{2}{x+1}\left(x + \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

11.6 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+2} - \dfrac{1 \times (x-1) - (x+2) \times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2} + \dfrac{3}{(x-1)^2}$.

On cherche les racines du trinôme $x^2 + x - 2$ dont le discriminant est $\Delta = 1 + 8 = 9$; on identifie deux racines $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. D'où la forme factorisée : $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$.

Alors : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \dfrac{3}{(x-1)^2} = \dfrac{(2x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)^2} + \dfrac{3(x+2)}{(x+2)(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

Le trinôme $2x^2 + 2x + 5$ dont le discriminant est $\Delta = 4 - 4 \times 2 \times 5 = -36 < 0$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

On a : $f'(x) = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

11.6 d) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} + 1 - 2\frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} + 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{1 + (x+1)^2 - 2(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1 + x^2 + 2x + 1 - 2x - 2}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

11.6 e) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1-\ln(x)) - (1+\ln(x))\frac{-1}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{\frac{2}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}$.

Fiche n° 12. Primitives

Réponses

12.1 a) .... $\boxed{\ln|t+1|}$

12.1 b) .... $\boxed{-\dfrac{3}{t+2}}$

12.1 c) .... $\boxed{-\dfrac{3}{2(t+2)^2}}$

12.1 d) .... $\boxed{-\dfrac{\cos(4t)}{4}}$

12.1 e) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}}$

12.1 f) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t+1}}$

12.2 a) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}\ln|1+t^3|}$

12.2 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}}$

12.2 c) .... $\boxed{-\sqrt{1-t^2}}$

12.2 d) .... $\boxed{\dfrac{3}{4}(1+7t^2)^{\frac{2}{3}}}$

12.2 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}\ln(1+3t^2)}$

12.2 f) .... $\boxed{-\dfrac{1}{(1+3t^2)^2}}$

12.2 g) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\ln^4 t}$

12.2 h) .... $\boxed{\dfrac{2}{(3-\mathrm{e}^{2t})^2}}$

12.2 i) .... $\boxed{-\dfrac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}}$

12.2 j) .... $\boxed{-\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}$

12.3 a) .... $\boxed{t+\ln t - \dfrac{1}{t}}$

12.3 b) .... $\boxed{\ln t - \dfrac{1}{2t^2}}$

Corrigés

12.1 a) Admet des primitives sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$.

....

12.1 b) Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

....

12.1 c) Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

....

12.1 d) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

....

12.1 e) Admet des primitives sur $]0,+\infty[$.

....

12.1 f) Admet des primitves sur $\mathbb{R}$.

....

Fiche n° 13. Calcul d'intégrales

Réponses

13.1 a)........ $\boxed{\text{Positif}}$

13.1 b)....... $\boxed{\text{Négatif}}$

13.1 c)........ $\boxed{\text{Positif}}$

13.2 a)............ $\boxed{14}$

13.2 b) .... $\boxed{50}$

13.2 c).......... $\boxed{\dfrac{147}{2}}$

13.2 d).......... $\boxed{-54}$

13.2 e)............. $\boxed{0}$

13.2 f)............. $\boxed{\dfrac{5}{2}}$

13.3 a)............. $\boxed{8}$

13.3 b)........... $\boxed{-2}$

13.3 c) .... $\boxed{\dfrac{8}{3}}$

13.3 d)............. $\boxed{0}$

13.3 e) .... $\boxed{-\dfrac{1}{30}}$

13.3 f)......... $\boxed{-\dfrac{2}{101}}$

13.4 a)............. $\boxed{0}$

13.4 b)............. $\boxed{1}$

13.4 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

13.4 d) .... $\boxed{18}$

13.4 e)...... $\boxed{e^2 - e^{-3}}$

13.4 f)......... $\boxed{-\ln 3}$

13.5 a)............ $\boxed{78}$

13.5 b)..... $\boxed{2(e^3 - 1)}$

13.5 c) . $\boxed{\dfrac{1}{\pi}\ln\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)}$

13.5 d).......... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{6}}$

13.5 e)............. $\boxed{6}$

13.5 f) ...... $\boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

Corrigés

13.1 a) On intègre une fonction positive et les bornes sont « dans le bon sens ».

13.1 b) $\displaystyle\int_5^{-3} |\sin 7x|\,dx = -\int_{-3}^{5} |\sin 7x|\,dx$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. Elle est positive car on intègre une fonction positive.

13.1 c) $\displaystyle\int_0^{-1} \sin x\,dx = -\int_{-1}^{0} \sin x\,dx$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. sin est négative sur $[-\pi, 0]$ donc sur $[-1, 0]$, $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sin x\,dx$ est donc négative.

13.2 a) Il s'agit de l'aire d'un rectangle de largeur 2 et de longueur 7.

13.2 b) On commence par mettre les bornes « dans le bon sens » : $\displaystyle\int_7^{-3} -5\,dx = -\int_{-3}^{7} -5\,dx = \int_{-3}^{7} 5\,dx$. Cette dernière intégrale est l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent 10 et 5.

13.2 c) Il s'agit de l'aire du triangle dont les sommets sont l'origine O, le point $A(7;0)$ et $B(7;21)$. Ce triangle est rectangle en A et son aire est $\dfrac{1}{2} \times AO \times AB$.

13.2 d) Les bornes sont « dans le bon sens », on peut donc interpréter l'intégrale comme une aire algébrique. Sur l'intervalle $[2, 8]$, la courbe de $f(x) = 1 - 2x$ est située sous l'axe des abscisses, l'aire algébrique sera négative.

Il s'agit de calculer l'aire du trapèze rectangle dont les sommets sont $A(2;0)$, $B(8;0)$, $C(8;-15)$ et $D(2;-3)$. L'aire de ce trapèze rectangle est $\dfrac{1}{2} \times AB \times (AD + BC) = \dfrac{1}{2} \times 6 \times (3 + 15)$.

13.2 e) Avec la relation de Chasles, on a $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sin x\,dx = \int_{-2}^{0} \sin x\,dx + \int_0^2 \sin x\,dx$.La fonction sinus étant impaire, les aires algébriques $\displaystyle\int_{-2}^{0} \sin x\,dx$ et $\displaystyle\int_0^2 \sin x\,dx$ sont opposées, il suit que leur somme est nulle.

13.2 f) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique. Cette aire est composée de deux triangles rectangles (les intégrales de -2 à 0 et de 0 à 1).

13.3 a) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique d'un rectangle.

13.3 b) $\displaystyle\int_1^3 2x - 5\,\mathrm{d}x = \Big[x^2 - 5x\Big]_1^3 = (3^2 - 15) - (1^2 - 5) = -2.$

13.3 c) $\displaystyle\int_{-2}^0 x^2 + x + 1\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\Big]_{-2}^0 = 0 - \Big(\frac{1}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 - 2\Big) = \frac{8}{3}.$

13.3 d) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

13.3 e) $\displaystyle\int_0^1 x^5 - x^4\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5\Big]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30}.$

13.3 f) $\displaystyle\int_1^{-1} x^{100}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{101}x^{101}\Big]_1^{-1} = -\frac{2}{101}.$

13.4 a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

13.4 b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,\mathrm{d}x = \Big[\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 2\sin\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = 1.$

13.4 c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$

13.4 d) $\displaystyle\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{100} = 18.$

13.4 e) $\displaystyle\int_{-3}^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x\Big]_{-3}^2 = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3}.$

13.4 f) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln|x|\Big]_{-3}^{-1} = -\ln 3.$

13.5 a) $\displaystyle\int_{-1}^2 (2x+1)^3\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{8}(2x+1)^4\Big]_{-1}^2 = \frac{625}{8} - \frac{1}{8} = 78.$

13.5 b) $\displaystyle\int_{-2}^4 \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}\,\mathrm{d}x = \Big[2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}\Big]_{-2}^4 = 2(\mathrm{e}^3 - 1).$

13.5 c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\pi x + 2} = \Big[\frac{1}{\pi}\ln|\pi x + 2|\Big]_0^1 = \frac{1}{\pi}\ln\Big(\frac{\pi+2}{2}\Big).$

13.5 d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{3}\cos(3x)\Big]_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}.$

13.5 e) $\displaystyle\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\Big]_0^{33} = \frac{2}{3}(10-1) = 6.$

13.5 f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\Big(\frac{\pi}{3} - x\Big)\,\mathrm{d}x = \Big[-\sin\Big(\frac{\pi}{3} - x\Big)\Big]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -\sin\Big(-\frac{\pi}{6}\Big) + \sin\Big(\frac{4\pi}{3}\Big) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Fiche n° 14. Équations différentielles

Réponses

14.1 a) .... $\boxed{x \mapsto 56\mathrm{e}^{12x}}$

14.1 b) .... $\boxed{x \mapsto 6\mathrm{e}^{x} - 1}$

14.1 c) .... $\boxed{x \mapsto \dfrac{8\mathrm{e}^{3x} - 5}{3}}$

14.1 d) .... $\boxed{x \mapsto 9\mathrm{e}^{2x} - 6}$

14.2 a) .... $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{(6-x)/5}}$

14.2 b) .... $\boxed{x \mapsto 1 - 2\mathrm{e}^{-2x/7+2}}$

14.2 c) .... $\boxed{x \mapsto \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}}$

14.2 d) .... $\boxed{x \mapsto \left(12 + \dfrac{2\mathrm{e}}{\pi}\right)\mathrm{e}^{\pi x - \pi^2} - \dfrac{2\mathrm{e}}{\pi}}$

Corrigés

14.1 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 12y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{12x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{12x}$.

Alors, $y_0(0) = 56 = \lambda$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 56\mathrm{e}^{12x}$.

....

14.1 b) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = \mu + 1$ soit $\mu = -1$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{x} - 1$. Alors, $y_0(0) = 5 = \lambda - 1$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 6\mathrm{e}^{x} - 1$.

....

14.1 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 3y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{3x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = 3\mu + 5$ soit $\mu = -5/3$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{3x} - 5/3$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda - 5/3$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \dfrac{8\mathrm{e}^{3x} - 5}{3}$.

....

14.1 d) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 2y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{2x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = 2\mu + 12$ soit $\mu = -6$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{2x} - 6$.

Alors, $y_0(0) = 3 = \lambda - 6$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 9\mathrm{e}^{2x} - 6$.

....

14.2 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'équation est homogène et son ensemble de solutions est $\left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-x/5},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-x/5}$.

Alors, $y_0(1) = \mathrm{e} = \lambda\mathrm{e}^{-1/5}$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{(6-x)/5}$.

....

14.2 b) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + \dfrac{2}{7}y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-2x/7},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 + 2\mu = 2$ soit $\mu = 1$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-2x/7} + 1$. Alors, $y_0(7) = -1 = \lambda\mathrm{e}^{-2} + 1$. Finalement, $y_0 : x \mapsto -2\mathrm{e}^{-2x/7+2} + 1$.

....

14.2 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - \sqrt{5}y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{\sqrt{5}x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 - \sqrt{5}\mu = 6$ soit $\mu = -\dfrac{6}{\sqrt{5}}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

Alors, $y_0(0) = \pi = \lambda - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

....

14.2 d) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - \pi y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{\pi x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = \pi\mu + 2e$ soit $\mu = -\dfrac{2e}{\pi}$.
Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{\pi x} - \dfrac{2e}{\pi}$. Alors, $y_0(\pi) = 12 = \lambda e^{\pi^2} - \dfrac{2e}{\pi}$.
Finalement, $y_0 : x \mapsto \left(12 + \dfrac{2e}{\pi}\right) e^{\pi x - \pi^2} - \dfrac{2e}{\pi}$.

....

Fiche n° 15. Suites numériques

Réponses

15.1 a) $\boxed{\dfrac{12}{5}}$

15.1 b) $\boxed{8}$

15.1 c) $\boxed{\dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}}$

15.1 d) $\boxed{\dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}}$

15.2 a) $\boxed{13}$

15.2 b) $\boxed{29}$

15.3 a) $\boxed{2^{\frac{1}{8}}}$

15.3 b) $\boxed{2^{\frac{1}{64}}}$

15.4 a) $\boxed{2}$

15.4 b) $\boxed{2}$

15.5 a) $\boxed{2n\ln(n)}$

15.5 b) $\boxed{4n\ln(2n)}$

15.6 a) $\boxed{21}$

15.6 b) $\boxed{10\ 000}$

15.6 c) $\boxed{2\ 001}$

15.6 d) $\boxed{10\ 201}$

15.7 a) $\boxed{\dfrac{17}{24}}$

15.7 b) $\boxed{\dfrac{1}{24}}$

15.8 a) $\boxed{\dfrac{3}{512}}$

15.8 b) $\boxed{\dfrac{3069}{512}}$

15.8 c) $\boxed{\dfrac{3}{1\ 024}}$

15.8 d) $\boxed{\dfrac{6141}{1024}}$

15.9 a) $\boxed{\dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}}$

15.9 b) $\boxed{\dfrac{11\sqrt{5}}{25}}$

15.10 a) $\boxed{13}$

15.10 b) $\boxed{211}$

Corrigés

15.1 a) $u_0 = \dfrac{2\times 0+3}{5}\times 2^{0+2} = \dfrac{12}{5}$.

15.1 b) $u_1 = \dfrac{2\times 1+3}{5}\times 2^{1+2} = \dfrac{5}{5}\times 8 = 8$.

15.1 c) $u_n = \dfrac{2(n+1)+3}{5}\times 2^{(n+1)+2} = \dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}$.

15.1 d) $u_{3n} = \dfrac{2\times 3n+3}{5}\times 2^{3n+2} = \dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}$

15.2 a) $u_1 = 2\times 1+3 = 5$ et $u_2 = 2\times 5+3 = 13$.

15.2 b) On calcule : $u_3 = 2\times 13+3 = 29$.

15.3 a) $v_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2^3}} = 2^{\frac{1}{8}}$.

15.3 b) $v_6 = 2^{\left(\frac{1}{2}\right)^6} = 2^{\frac{1}{2^6}} = 2^{\frac{1}{64}}$.

15.4 a) $w_1 = \dfrac{1}{2}\times 2^2 = \dfrac{4}{2} = 2$ et, de même, $w_2 = 2$.

15.4 b) Il faudrait formaliser une preuve par récurrence.

15.5 a) $t_{2n} = \ln((2n)^{2n}) - \ln(2^{2n}) = 2n\ln(2) + 2n\ln(n) - 2n\ln(2) = 2n\ln(n)$.

15.5 b) $t_{4n} = \ln((4n)^{4n}) - \ln(2^{4n}) = 8n\ln(2) + 4n\ln(n) - 4n\ln(2) = 4n\ln(2) + 4n\ln(n) = 4n\ln(2n)$.

15.6 a) $a_{100} = a_0 + 100 \times 2 = 201.$

15.6 b) $s_{100} = \dfrac{100 \times (1+199)}{2} = \dfrac{100 \times 200}{2} = 100^2 = 10\ 000.$

15.6 c) $a_{1\ 000} = 1 + 1\ 000 \times 2 = 2\ 001.$

15.6 d) $s_{101} = \dfrac{101 \times (1+201)}{2} = \dfrac{101 \times 202}{2} = 101^2 = 10\ 201.$

15.7 a) $b_{102} = \dfrac{b_{101} + b_{103}}{2} = \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{2} = \dfrac{\frac{8+9}{12}}{2} = \dfrac{17}{24}.$

15.7 b) $r = u_{102} - u_{101} = \dfrac{17}{24} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{24}.$

15.8 a) $g_9 = 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^9 = \dfrac{3}{2^9} = \dfrac{3}{512}.$

15.8 b) $\sigma_{10} = g_0 \times \dfrac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} = 6\dfrac{2^{10} - 1}{2^{10}} = \dfrac{3 \times 1\ 023}{512} = \dfrac{3069}{512}.$

15.8 c) $g_{10} = g_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} = 3 \times \dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{3}{1\ 024}.$

15.8 d) $\sigma_{11} = 6\dfrac{2^{11} - 1}{2^{11}} = \dfrac{3 \times 2\ 047}{1\ 024} = \dfrac{6141}{1024}.$

15.9 a) $h_{12} = \sqrt{h_{11} \times h_{13}} = \sqrt{\dfrac{5\pi \times 11\pi}{11 \times 25}} = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{5}} = \dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}.$

15.9 b) $r = \dfrac{h_{12}}{h_{11}} = \dfrac{\frac{\pi\sqrt{5}}{5}}{\frac{5\pi}{11}} = \dfrac{\pi\sqrt{5} \times 11}{5 \times 5\pi} = \dfrac{11\sqrt{5}}{25}.$